



**Titre:** Modèle d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun  
Title: commun

**Auteur:** Yassine Bzioui  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bzioui, Y. (2007). Modèle d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8382/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8382/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE D’AFFECTATION  
DE PASSAGERS DANS UN RÉSEAU  
DE TRANSPORT EN COMMUN

YASSINE BZIOUI  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L’OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAITRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE INDUSTRIEL)

MAI 2007



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file   Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47654-3*  
*Our file   Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47654-3*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MODÈLE D’AFFECTATION  
DE PASSAGERS DANS UN RÉSEAU  
DE TRANSPORT EN COMMUN

présenté par : BZIOUI Yassine

en vue de l’obtention du diplôme de : Maitrise ès sciences appliquées

a été dument accepté par le jury d’examen constitué de :

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIÉ Martin, ing, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. FLEURENT Charles, Ph.D., membre

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier le Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions (GERAD) situé dans le Pavillon André-Aisenstadt sur le campus de l'Université de Montréal de m'avoir permis d'effectuer ce projet de maîtrise pour valider ma maîtrise recherche en génie industriel au sein de l'École Polytechnique de Montréal. Je remercie tout particulièrement mon directeur de recherche, M. François Soumis, professeur de mathématique à l'École Polytechnique de Montréal, qui m'a accueilli au GERAD.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à mon codirecteur de recherche, M. Martin Trépanier, coordonnateur des programmes d'études supérieures de génie industriel à l'École Polytechnique de Montréal, mais aussi à Benoît Rochefort, François Lessard et Pierre Girard, informaticiens programmeurs du GERAD ont toujours été disponibles pour répondre à mes questions concernant le langage de programmation. Je les remercie de m'avoir expliqué comment fonctionne l'environnement informatique du GERAD et notamment son utilisation à distance.

Je pense aussi à M Pierre Trudeau, vice-président développement des affaires chez GIRO Inc pour son aide lorsque j'ai rencontré le moindre problème dans l'exécution de mon travail de recherche.

Sans oublier, tous les membres des services administratif et technique du GERAD qui m'ont aidé à effectuer mon projet de maîtrise recherche dans de bonnes conditions.

## **RÉSUMÉ**

La plupart des modèles d'affectation de passagers en transport en commun que l'on trouve dans la littérature ne reflètent pas d'assez près la réalité, à savoir le comportement réel des voyageurs. La majorité de ces modèles reposent sur le principe du plus court chemin et affectent la demande totale d'une origine-destination donnée sur le même itinéraire. L'objectif traduit souvent le temps de déplacement total qui ne correspond pas vraiment à la qualité de service.

Dans ce mémoire, nous proposons un modèle plus fidèle au comportement des voyageurs, qui permet la répartition de ces derniers sur plusieurs chemins intéressants, avec dans l'objectif non seulement le temps total, mais aussi une pénalité de congestion dans les autobus qui assure un certain confort aux passagers, car il est plus agréable de voyager assis que de voyager debout. Nous nous inspirons d'un modèle proposé par de Cea et Fernandez (1989) pour construire le notre.

Le modèle de de Cea et Fernandez (1989), affecte la demande sur le plus court chemin. Il a la particularité d'utiliser un réseau où chaque paire d'arrêts d'une même ligne d'autobus est reliée par un arc direct. Pour les paires d'arrêts reliées par plus d'une ligne d'autobus qui suivent le même itinéraire, il y a un seul arc commun entre ces deux arrêts. Un problème hyperbolique sélectionne parmi ces lignes le sous-ensemble qui minimise le temps de déplacement entre ces deux arrêts. Les lignes du sous-ensemble sont appelées lignes communes. Le voyageur est supposé monter dans le premier autobus qui passe parmi le sous-ensemble. Le flot de cet arc commun est reparti sur ses lignes communes proportionnellement à leur fréquence.

Notre idée est de réduire le nombre d'arcs dans le réseau pour améliorer l'efficacité de l'algorithme tout en gardant le problème hyperbolique de sélection des lignes communes. Nous utilisons un réseau de segments, c'est-à-dire que, pour chaque ligne

d'autobus, il y a un arc entre deux arrêts consécutifs. Mais, pour les endroits où il y a des lignes communes, nous représenterons en plus les arcs communs entre chaque paire d'arrêts de la section commune.

Notre modèle d'affectation procède à des boucles jusqu'à convergence des flots sur les arcs. A l'intérieur de chaque boucle, nous faisons une boucle sur les origines. Pour chaque origine, nous avons un problème de réseau avec des contraintes de conservation de flots et un objectif composé de trois parties : un terme linéaire, un terme quadratique et un terme linéaire par morceaux. Le premier terme, linéaire, correspond au temps perçu total de déplacement, il a donc tendance à concentrer les flots sur le plus court chemin. Le deuxième terme, quadratique, correspond au produit du flot au carré par le temps perçu et répartit les flots sur tous les chemins possibles de façon inversement proportionnelle au coût de ces chemins. Le temps perçu correspond au temps d'attente, au temps de déplacement et un temps supplémentaire lié à la surcharge dans les autobus. En effet, ce troisième temps peut être vu comme une pénalité de surcharge s'applique au voyageur debout dans le bus. Un passager voyageant debout perçoit le temps de déplacement plus long qu'un voyageur se déplaçant assis.

Nous avons testé notre modèle sur une partie du réseau d'autobus de la ville de Montréal. Dans un premier temps nous considérons une demande générée aléatoirement de 2209 origines-destinations qui s'équilibre au bout de 30 itérations de 48 secondes soit un total de 24 minutes. Puis dans un second temps nous considérons la demande réelle fournie par l'Agence Métropolitaine de Transport (2003) représentant 6329 origines-destinations et s'équilibrant en 20 itérations de 607 secondes soit un total de 3h22.

## **ABSTRACT**

Many of the transit assignment models that we found in the literature do not represent correctly the traveler behavior. A lot of these models are based on the minimal route principle and assign the whole demand of a given origin-destination on the same route. The objective often is to minimizing the total travel time which does not correspond to the quality of service.

In this master's thesis, we propose a new model closer to the traveler behavior, which makes it possible the distribution of the demand on several interesting routes. In the objective we add a penalty of congestion in the buses which is applied to the standing travelers. We inspired from a model suggested by de Cea and Fernandez (1989) to build ours.

The model of de Cea and Fernandez (1989) assigns demand on the shortest path. Its network is composed of nodes and arcs between two nodes of the same line not necessarily consecutive. For the pairs of nodes connected by more than one line of buses which follow the same route, there is only one common arc between these two stops. A hyperbolic programming problem selects the subset of lines that minimize the total travel time. The lines of the subset are called common lines. The traveler is supposed to get into the first bus of the subset which stops. The flow of a common arc is assigned to its common lines proportionally to their frequency.

Our idea is to reduce the number of arcs in the network in order to improve the effectiveness of the algorithm. We use a network based on line segments. But for the parts of network where there are common lines, we represent common arcs between each pair of stops.



Our model loops until the flows converge on the arcs. Inside each loop there is a loop on the origins. For each origin we have a problem with network flow constraints and an objective which is composed of three parts: a linear term, a quadratic term and a piecewise linear term. The first term, linear, corresponds to the total travel time, it concentrates flows on the shortest path. The second term, quadratic, corresponds to the product of the squared flows by travel time, it distributes the flows on all possible routes inversely proportional to their cost. The third term, piecewise linear, is a penalty of overload which is applied to the standing travelers in the bus. The penalty is represented by a piecewise linear function because it increases with the number of standing passengers.

We applied our model on a part of the Montreal transit network. First, we consider a generated demand of 2209 origins-destinations which is balanced in 30 iterations of 48 seconds each one that is 24 minutes. Then in the second time we consider the real demand provided by the Montreal transit company which represents 6329 origins-destinations and is balanced in 20 iterations of 607 seconds each one that is 3h22.

# TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iv
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT .....	vii
LISTE DES TABLEAUX .....	xii
LISTE DES FIGURES.....	xiii
LISTE DES ANNEXES .....	xiv
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 : REVUE DE LITTÉRATURE .....	2
1.1. DIFFÉRENTES APPROCHES .....	2
1.1.1. CHRIQUI ET ROBILLARD (1975) .....	3
1.1.2. SPIESS ET FLORIAN (1989) .....	3
1.1.3. TONG ET WONG (1999) .....	4
1.1.4. CARRARESI, MALUCELLI ET PALLOTTINO (1995) .....	5
1.1.5. FAN ET MACHEMEHL (2004).....	6
1.2. MODÈLE DE DE CEA ET FERNANDEZ (1989) .....	7
1.2.1. LE PROBLÈME DES LIGNES COMMUNES .....	7
1.2.2. NOTATIONS .....	8
1.2.3. FORMULATION MATHÉMATIQUE.....	9
1.2.4. RÉOLUTION DU PROBLÈME .....	11
1.2.4.1. 1 <sup>ère</sup> étape : Résolution de problèmes hyperboliques.....	12

1.2.4.2. 2 <sup>ème</sup> étape : Affectation aux sections de routes.....	13
1.2.4.3. 3 <sup>ème</sup> étape : Affectation aux sections de lignes.....	14
1.2.5. IMPLANTATION ET APPLICATION .....	14
1.2.6. LES FAIBLESSES DU MODÈLE .....	15
<b>CHAPITRE 2 : MODÈLE D'AFFECTATIONS DE PASSAGERS .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1. PROPOSITION DE MODÈLE.....</b>	<b>16</b>
2.1.1. PRISE EN COMPTE DE LA SURCHARGE DANS LES AUTOBUS .....	16
2.1.1.1. Modèle proposé .....	16
2.1.1.2. Idée de résolution .....	18
2.1.1.3. Principe de l'algorithme .....	19
2.1.2. RÉSEAU EFFICACE POUR L'OPTIMISATION .....	23
2.1.2.1. Cas : Problème de flot non-linéaire à coûts séparables .....	23
2.1.2.2. Définition de lignes communes.....	25
2.1.2.3. Représentation du réseau .....	27
2.1.2.4. Faiblesse du réseau.....	29
2.1.3. RÉPARTITION PLURALISTE DES FLOTS .....	31
2.1.3.1. Modèle Logit sur les routes .....	33
2.1.3.2. Modèle Logit sur les sections de lignes .....	36
2.1.4. 2 <sup>ÈME</sup> ÉTAPE : SYNTHÈSE ET PROPOSITION DE MODÈLES .....	46
2.1.4.1. Synthèse des modèles .....	46
2.1.4.2. Propositions de nouveaux modèles .....	47
2.1.4.3. Modèle retenu pour l'étude.....	51
2.2.1. ALGORITHME DE RÉOLUTION.....	52
2.2.1.1. Problème de flot .....	52
2.2.1.2. Principe d'une itération $k$ .....	53
2.2.2. RÉSEAU RENDANT LES COÛTS DE SURCHARGE LINÉAIRE.....	57
<b>CHAPITRE 3 : RÉSULTATS OBTENUS.....</b>	<b>60</b>
<b>3.1. DONNÉES EN ENTRÉE.....</b>	<b>60</b>

<b>3.2. DEMANDE GÉNÉRÉE .....</b>	<b>61</b>
<b>3.2.1. RÉSULTATS SANS LES LIGNES COMMUNES .....</b>	<b>61</b>
<b>3.2.2. RÉSULTATS AVEC LES LIGNES COMMUNES.....</b>	<b>64</b>
<b>3.3. DEMANDE RÉELLE .....</b>	<b>70</b>
<b>3.3.1. RÉSULTATS SANS LES LIGNES COMMUNES .....</b>	<b>71</b>
<b>3.3.2. RÉSULTATS AVEC LES LIGNES COMMUNES.....</b>	<b>72</b>
 <b>CONCLUSION.....</b>	 <b>74</b>
 <b>RÉFÉRENCES.....</b>	 <b>75</b>
 <b>ANNEXES.....</b>	 <b>77</b>

## **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 2.1 : Coûts sur les arcs des modèles 1 et 2 .....	59
Tableau 2.2 : Coûts sur les arcs du modèle hybride.....	59
Tableau 3.1 : Capacité des lignes d'autobus .....	62
Tableau 3.2 : Flots obtenus pour différentes valeur de $K$ .....	62
Tableau 3.3 : Flots regroupés au départ .....	63
Tableau 3.4 : Flots obtenus de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / Côte-des-Neiges...	65
Tableau 3.5 : Flots obtenus sans lignes communes.....	71
Tableau 3.6 : Flots obtenus avec lignes communes .....	72
Tableau 3.7 : Flots regroupés au départ avec lignes communes .....	72
Tableau 3.8 : Temps d'exécution.....	73

## **LISTE DES FIGURES**

Figure 1.1 : Réseau de sections de lignes.....	8
Figure 2.1 : Fonction de pénalité .....	17
Figure 2.2 : Sections de routes et segments .....	18
Figure 2.3 : Réseau de segments.....	24
Figure 2.4 : Réseau de sections de routes et de segments.....	28
Figure 2.5 : Réseau corrigé de sections de routes et de segments.....	28
Figure 2.6 : Réseau amélioré de sections de routes et de segments.....	30
Figure 2.7 : Fonction de répartition.....	32
Figure 2.8 : Différentes fonctions de répartition.....	43
Figure 2.9 : Fonction de répartition du modèle 4.....	49
Figure 2.10 : Fonction de répartition du modèle 5.....	51
Figure 2.11 : Représentation de la pénalité sur les arcs .....	58
Figure 3.1 : Plan du réseau de métro.....	60
Figure 3.2 : Chemins de Mont-Royal / du Parc à Graham / Rockland .....	61
Figure 3.3 : Chemins de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / Côte-des-Neiges .....	65
Figure 3.4 : Valeurs de delta avec et sans les lignes communes.....	66
Figure 3.5 : Fonction de pénalité .....	67
Figure 3.6 : Valeurs de delta avec amortissement.....	68
Figure 3.7 : Valeurs de delta avec amortissement amélioré.....	69
Figure 3.8 : Valeur de delta sans les lignes communes.....	71
Figure 3.9 : Valeur de delta avec et sans les lignes communes .....	73

## **LISTE DES ANNEXES**

<b>ANNEXE A : PREUVE D'ÉQUIVALENCE ENTRE LES PROBLÈMES (P2) ET (P3)...</b>	<b>77</b>
<b>ANNEXE B : DÉMONSTRATION DE L'ALGORITHME DE SÉLECTION DES SECTIONS DE LIGNES UTILISÉES .....</b>	<b>78</b>
<b>ANNEXE C : ANALOGIE AU MODÈLE DE COURANT ÉLECTRIQUE .....</b>	<b>80</b>
<b>ANNEXE D : STRUCTURE DU CODE .....</b>	<b>81</b>
<b>ANNEXE E : SCHÉMA LOGIQUE DU CODE .....</b>	<b>86</b>
<b>ANNEXE F : MODULE D'OPTIMISATION <i>AFFECTOPT</i> .....</b>	<b>88</b>

## **INTRODUCTION**

L'un des problèmes rencontré dans l'industrie du transport en commun est la planification du réseau, ce que l'on appelle en recherche mathématique le « Network Design ». Il faut déterminer le chemin qu'empruntera chaque ligne d'autobus ainsi que sa fréquence qui permettront d'assurer une bonne qualité de service de transport aux citoyens. Nous appelons un scénario de planification réseau, un réseau de lignes d'autobus avec à leur fréquence.

L'idée est de concevoir un outil d'aide à la décision qui va évaluer des scénarii de planification réseau. Cet outil va donner la charge du réseau pour un scénario de planification réseau donné en déterminant le comportement des passagers dans le réseau. Il s'agit en fait d'un modèle d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun. Pour ce projet de maîtrise, notre objectif est de déterminer un modèle d'affectation de passagers qui affectera les voyageurs d'une plage horaire donnée sur les lignes d'autobus et de métro.

Dans un premier temps, nous avons travaillé sur l'étude d'un nouveau modèle d'affectation de passagers inspiré d'un modèle proposé par de Cea et Fernandez (1989), qui a l'avantage de proposer un algorithme de résolution efficace. Notre modèle reflètera plus naturellement le comportement des voyageurs par l'utilisation de chemins équivalents proches du plus court chemin permettant une meilleure répartition de la charge et la prise en compte de surcharge dans les autobus.

À travers ce mémoire de maîtrise, après avoir présenté différents modèles d'affectation de passagers trouvés dans la littérature et plus particulièrement celui dont je me suis inspiré, je définis dans une seconde partie le nouveau modèle étudié dans le cadre de la recherche. Puis, dans une troisième et dernière partie, j'expose les résultats obtenus sur une partie du réseau de transport de la ville de Montréal.



## **CHAPITRE 1 : REVUE DE LITTÉRATURE**

Notre objectif consiste à développer un modèle d'affectation de passagers. Les décisions du modèle portent sur le choix des routes des passagers d'une origine vers plusieurs destinations et le partage du même véhicule par des passagers voyageant entre des origines-destinations différentes. Les facteurs à considérer sont les temps de parcours, les attentes aux arrêts, les lignes communes, c'est-à-dire les suites d'arrêts desservis par plusieurs lignes d'autobus, et la capacité des lignes d'autobus qui correspond au nombre de sièges offert sur ligne lors de la plage horaire étudiée. Cette dernière, la capacité, n'est pas une contrainte dure, mais elle agit sur le modèle de façon implicite à travers le calcul de la pénalité de surcharge. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps présenter rapidement différents modèles d'affectation de passagers trouvés dans la littérature mais aussi dans la revue de littérature de Desaulniers et Hickman (2007) qui présentent différents modèles de résolution des problèmes rencontrés en transport en commun. Puis, dans un second temps, nous allons exposer plus en détail le modèle de Cea et Fernandez (1989), dont nous allons nous inspirer pour la suite de notre recherche.

### **1.1. Différentes approches**

Le problème d'affectation de passagers peut être défini de la façon suivante : soit un nombre de passagers d'une origine vers une destination, quels sont les flots sur les chemins du réseau empruntés par ces passagers? L'objectif du problème est la minimisation du temps de voyage ou du coût généralisé. Le temps de voyage peut se composer des variables suivantes, avec différents poids: le temps de marche, le temps d'attente, le temps à bord, le temps de correspondance et le nombre de correspondances. Le passager doit choisir un itinéraire ou un ensemble d'itinéraires qui peuvent l'emmener de l'origine à la destination en une durée minimum. Un des problèmes qui peut se poser est qu'il y ait plusieurs lignes d'autobus empruntant les mêmes rues. Dans ces situations, le choix de l'itinéraire dépend de l'ordre d'arrivée des autobus. Ce cas appelé problème

de lignes communes a été défini par Chriqui et Robillard (1975). Dans ces cas de réseaux à chemins multiples, on parle aussi de stratégies définies par Spiess et Florian (1989). Ces problèmes d'affectation de passagers ont été considérés par les chercheurs comme un problème à part, comme un sous-problème d'un problème plus complexe tel que la conception de réseau, ou bien comme un problème d'équilibre de réseau.

### **1.1.1. Chriqui et Robillard (1975)**

Ce que l'on entend par lignes communes sont des lignes d'autobus qui empruntent le même itinéraire sur une certaine section du réseau. La répartition des passagers sur cette section se fait par proportion sur l'ensemble de ses lignes. Dans le modèle de Le Clercq, 1972, on suppose qu'à un arrêt donné de la section, le voyageur monte dans le premier bus qui passe parmi tous ceux qui desservent cet arrêt. Chriqui et Robillard proposent un traitement plus rigoureux du problème. Selon eux, il n'est pas toujours dans l'avantage du passager de monter dans le premier bus qui passe. Par exemple, si un ou plusieurs itinéraires ont un temps de déplacement plus court que les autres. Dans ce cas, il est plus judicieux de ne pas monter dans le premier bus qui s'arrête si celui-ci possède un temps de déplacement plus long. Chriqui et Robillard formule le problème de la façon suivante. On suppose que le passager choisit un sous-ensemble de lignes (minimisant la somme du temps à bord et de l'espérance du temps d'attente), il montera dans le premier qui s'arrêtera à l'arrêt parmi ces lignes sélectionnées. Ce travail a été poursuivi par Marguier et Ceder (1984) et Israeli et Ceder (1996), dans lequel les lignes sont regroupées en « lignes rapides » et « lignes lentes ». Nous verrons dans la section 2 de ce chapitre que de Cea et Fernandez (1989), proposent un algorithme plus efficace que celui de Chriqui et Robillard. Cet algorithme repose sur la création d'un réseau auxiliaire défini par un ensemble de noeuds et de portions d'itinéraires.

### **1.1.2. Spiess et Florian (1989)**

Spiess et Florian présentent le concept de « passenger strategy ». Le voyageur choisit une stratégie qui va lui permettre de rejoindre sa destination pour un coût minimum. Ce

coût correspond au temps total de parcours espéré qui est une somme pondérée du temps de marche, du temps d'attente et du temps à bord. Une stratégie est un ensemble de règles qui permet au voyageur d'atteindre sa destination selon des itinéraires pertinents. La stratégie définit un ensemble de chemins possibles et c'est le premier véhicule qui s'arrêtera à l'arrêt de départ qui va déterminer lequel de ces chemins empruntera le voyageur pour arriver à destination. Voici un exemple de stratégie pour voyager du nœud A au nœud D.

- ✓ Au nœud A, prendre la ligne 1 jusqu'au nœud B; transfert sur la ligne 2 jusqu'au nœud D.
- ✓ Au nœud A, prendre la ligne 3 jusqu'au nœud C; transfert sur la ligne 4 jusqu'au nœud D.

Nous avons deux chemins possibles entre les nœuds A et D, et le chemin choisi dépendra du premier bus qui se présente au nœud A. Le problème d'affectation de passagers se formule en un problème linéaire en nombres entiers, où la variable de décision est une variable binaire indiquant si l'arc associé est dans la stratégie ou non. L'algorithme de Spiess et Florian n'a pas besoin de résoudre entièrement le problème pour obtenir l'ensemble des lignes attractives, alors que celui de Chriqui et Robillard doit identifier l'ensemble des lignes communes qui minimisent le temps total de voyage.

### **1.1.3. Tong et Wong (1999)**

Tong et Wong proposent un modèle d'affectation de passagers basé sur les horaires contrairement aux modèles de Chriqui et Robillard, et Spiess et Florian qui sont basés sur les fréquences. Les voyageurs sont affectés directement aux véhicules et non pas aux lignes de transport. Il s'agit d'un modèle dynamique avec une matrice origine-destination dépendante du temps (origine, destination, intervalle de temps). Le graphe est composé de nœuds, d'arcs de transport et d'arcs de marche. Le coût est composé du temps à bord, du temps d'attente, du temps de marche et d'une pénalité de temps pour chaque correspondance. Toutes ses composantes du coût sont pondérées par un coefficient de sensibilité qui varie parmi les passagers et est défini par une fonction de

densité. Tong et Wong ont développé un algorithme de résolution composé de trois parties :

- ✓ Tout d'abord, ils appliquent l'algorithme de Dijkstra depuis un nœud origine vers toutes les destinations pour étiqueter tous les nœuds par  $\pi_{irk}$ , heure d'arrivée au nœud  $k$  du passager parti du nœud  $r$  à l'heure  $t$ .
- ✓ Puis de même que précédemment mais en sens inverse à savoir depuis un nœud destination vers toutes les origines. Dans ce cas, l'étiquette  $\chi_{tsk}$  correspond à l'heure de départ au plus tard du nœud  $k$  du passager parti du nœud  $r$  à l'heure  $t$  et voulant atteindre sa destination  $s$  à l'heure  $\varphi_{trs}$ .

Le chemin optimal du nœud origine  $r$  jusqu'au nœud destination  $s$  parti à l'heure  $t$  ne doit pas traverser un nœud  $k$  pour lequel  $\pi_{irk} > \chi_{tsk}$ . Ainsi, cela permet d'obtenir un réseau réduit en éliminant tous les nœuds pour lesquels  $\pi_{irk} > \chi_{tsk}$ .

- ✓ Et pour finir, ils utilisent une méthode par évaluation et séparation pour déterminer les chemins intéressants dans le réseau réduit pour chaque paire origine-destination.

#### **1.1.4. Carraresi, Malucelli et Pallottino (1995)**

Carraresi, Malucelli et Pallottino se sont penchés sur l'affectation des passagers dans un réseau de transport régional. Il s'agit d'un modèle qui améliore l'efficacité du système de transport sans en augmenter les coûts. Le but est d'améliorer la qualité de service en diminuant le temps total d'attente. La demande se compose de deux sous-ensembles :

- ✓ To (Target time origine) : Personnes ayant une heure de départ désirée.
- ✓ Td (Target time destination) : Personnes ayant une heure d'arrivée désirée.

Deux modèles de comportements sont utilisés :

- ✓ Le coût généralisé : Sélection du chemin à coût minimum et de ses équivalents proches ayant une différence relative inférieure à  $\delta > 0$ , soit l'ensemble  $P$ .

- ✓ La « désutilité » du chemin : La désutilité se mesure aux différents nœuds par la différence entre les chemins optimaux de  $P$ . La désutilité du chemin correspond au maximum de ses désutilités. Un chemin  $\varepsilon$ -faisable possède une désutilité inférieure à  $\varepsilon > 0$ . Il en ressort  $P(\varepsilon)$ , l'ensemble des chemins  $\varepsilon$ -faisables.

Puis à l'aide d'un système linéaire, la demande est affectée afin de déterminer  $F(\varepsilon)$ , l'ensemble des flots  $\varepsilon$ -faisables. Ensuite pour finir, les auteurs proposent pour améliorer l'efficacité du système de transport de modifier les heures de départ afin de minimiser le coût total généralisé tout en respectant les contraintes imposées par les horaires des chauffeurs et que l'affectation donnée reste toujours  $\varepsilon$ -faisable.

#### **1.1.5. Fan et Machemehl (2004)**

Dans leur article traitant des problèmes de conception de réseau, Fan et Machemehl proposent un modèle d'affectation de passagers dit "hiérarchique". Le voyageur choisit son chemin selon les critères suivants classés par ordre de priorité : le nombre de correspondances, le nombre et la longueur des longues marches et le temps de déplacement. Le passager utilisera le chemin comportant le moins de correspondances puis celui nécessitant le moins de longues marches. Si plus d'un chemin répond à ces critères, le voyageur optera pour celui ayant le temps total minimum. C'est en se basant sur ces critères que le modèle proposé peut être perçu comme hiérarchique en considérant quatre niveaux de chemins. Le premier niveau comprend les chemins avec 0 correspondances 0 longues marches, à savoir les chemins directs. Le deuxième niveau comprend les chemins avec 0 correspondances 1 longues marches ou 1 correspondances 0 longues marches. Le troisième niveau comprend les chemins avec 2 correspondances 0 longues marches, 1 correspondance 1 longue marche, ou 0 correspondances 2 longues marches. Le quatrième niveau correspond au chemin où le service n'est pas disponible. Ainsi, pour chaque paire origine-destination, le processus d'affectation consiste à vérifier l'existence de chemins dans le premier niveau sinon dans le deuxième niveau et ainsi de suite. Une fois le niveau trouvé, la demande est distribuée parmi les chemins du niveau.

En 1989, de Cea et Fernandez ont proposé un modèle d'affectation de passagers donnant les mêmes résultats que le modèle de Chriqui et Robillard ainsi que celui de Spiess et Florian. Cependant, leur algorithme de résolution est bien plus efficace que celui de Chriqui et Robillard en 1975 et celui de Spiess et Florian en 1989. Nous allons étudier ce modèle plus en détails dans la section suivante.

## **1.2. Modèle de de Cea et Fernandez (1989)**

Dans l'article, les auteurs considèrent que chaque voyageur de A vers B choisit l'itinéraire ayant le « coût » perçu minimal. Une portion d'itinéraire entre 2 nœuds de correspondance consécutifs est appelée section de route. Chaque section de route est associée à un ensemble de lignes communes ou lignes attractives.

### **1.2.1. Le problème des lignes communes**

Nous considérons 2 nœuds A et B du réseau de transport. Soit  $L$ , l'ensemble de toutes les lignes passant en A et allant vers B. Le voyageur de A vers B ne considère qu'un sous-ensemble  $L_1$  ( $L_1 \subset L$ ) de lignes attractives afin de minimiser son temps de parcours espéré entre A et B qui est une somme composée de :

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ Temps d'attente espéré} &= \frac{\gamma}{\sum_{l \in L_1} f_l x_l} \\ \checkmark \text{ Temps moyen à bord} &= \frac{\sum_{l \in L_1} t_l f_l x_l}{\sum_{l \in L_1} f_l x_l} \end{aligned}$$

$\gamma = 1$  si l'arrivée des bus respecte une loi de Poisson (aléatoire), ou bien  $\gamma = 1/2$  si les bus sont uniformément espacés.

$x_l = 1$ , si  $l$  est une ligne commune de  $L_1$ , 0 sinon.

$f_l$  = Fréquence de la ligne  $l$ .

$t_l$  = Temps à bord de la ligne  $l$ .

Le problème pour déterminer les lignes du sous-ensemble  $L_l$  est un problème de programmation hyperbolique pour chaque ensemble  $L$  de lignes communes :

$$\underset{\{x_l\}}{\text{Min}} \frac{\gamma + \sum_{l \in L} t_l f_l x_l}{\sum_{l \in L} f_l x_l}$$

Sous contraintes :  $x_l \in \{0,1\} \quad \forall l \in L$

### 1.2.2. Notations

Voici quelques définitions pour la compréhension du modèle :

- ✓ Section de ligne : portion d'une ligne d'autobus entre 2 nœuds, pas nécessairement consécutifs.
- ✓ Section de route : portion entre 2 nœuds de correspondance consécutifs. Elle est associée à un ensemble de lignes communes.

Le réseau utilisé pour le modèle se définit par  $G(N, L)$ , avec  $N$ , l'ensemble des arrêts, et  $L$ , l'ensemble de toutes les sections de lignes possibles (Cf. figure 1.1 représentant quatre lignes d'autobus).

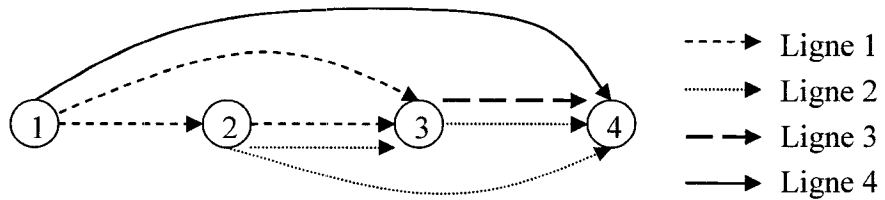


Figure 1.1 : Réseau de sections de lignes

Pour définir le modèle d'affectation, nous utiliserons la notation suivante :

$W$  : l'ensemble des paires de nœuds connectées par au moins une section de ligne.

$S_{ij}$  : l'ensemble des sections de lignes connectant directement les nœuds  $i$  et  $j$ .

$L_i^+$  : l'ensemble des sections de lignes sortant du nœud  $i$ .

$L_i^-$  : l'ensemble des sections de lignes entrant au nœud  $i$ .

$v_l$  : flot sur la section de ligne  $l$ .

$f_l$  : fréquence associée à la section de ligne  $l$ .

$t_l$  : temps à bord sur la section de ligne  $l$ .

$g_i$  : nombre de voyageurs se rendant au nœud  $i$  comme destination.

$V_{ij}$  : flot total sur la section de route  $(i, j)$ .

### 1.2.3. Formulation mathématique

Le problème pour affecter les voyageurs partant d'une origine  $o$  donnée et se rendant vers tous les nœuds destinations est défini par (P1).

$$(P1) : \quad \underset{\{x_l, V_{ij}, v_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in L} v_l t_l + \sum_{(i,j) \in W} \frac{\mathcal{W}_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \quad (1)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{l \in L_i^+} v_l + g_i = \sum_{l \in L_i^-} v_l \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (2)$$

$$v_l = \frac{x_l f_l V_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \quad \forall (i,j) \in W, l \in S_{ij} \quad (3)$$

$$v_l \geq 0 \quad \forall l \in L \quad (4)$$

$$x_l \in \{0,1\} \quad \forall l \in L \quad (5)$$

$$V_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in W. \quad (6)$$

L'objectif (1) correspond au temps total des voyageurs partant de l'origine  $o$ . La contrainte (2) est une contrainte réseau de conservation de flots à chaque nœud du réseau. L'équation (3) détermine le flot de passagers sur chaque section de ligne. Pour une paire  $(i, j)$  donnée, les valeurs binaires associées  $x_l$  ( $l \in S_{ij}$ ) définissent l'ensemble optimal des lignes attractives.

Remarque : Aucune contrainte de (P1) ne force le flot qui va de  $i$  à  $j$  à emprunter des sections de lignes qui relient directement  $i$  et  $j$ . La fonction objectif, cependant, pénalise les chemins indirects, (i.e., avec plusieurs arcs) via les temps d'attente.



Pour le 2<sup>ème</sup> terme de la fonction objectif, on pose  $w_{ij}$ , le temps d'attente total pour les voyageurs de  $i$  à  $j$ .

$$w_{ij} = \frac{\mathcal{W}_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \quad \forall (i, j) \in W \quad (7)$$

Ainsi, on obtient (P2) :

$$\underset{\{x_l, w_{ij}, v_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in L} v_l t_l + \sum_{(i, j) \in W} w_{ij} \quad (8)$$

Sous contraintes : (2), (4), (5), (6), (7) et

$$v_l = x_l f_l \frac{w_{ij}}{\gamma} \quad \forall (i, j) \in W, l \in S_{ij}. \quad (9)$$

La contrainte (9) peut être relaxée. La preuve de la relaxation est détaillée dans l'annexe A.

$$v_l \leq f_l \frac{w_{ij}}{\gamma} \quad \forall (i, j) \in W, l \in S_{ij}. \quad (10)$$

Le problème (P2) devient linéaire et on a (P3) :

$$\underset{\{w_{ij}, v_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in L} v_l t_l + \sum_{(i, j) \in W} w_{ij} \quad (11)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{l \in L_i^+} v_l + g_i = \sum_{l \in L_i^-} v_l \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (12)$$

$$v_l \leq f_l \frac{w_{ij}}{\gamma} \quad \forall (i, j) \in W, l \in S_{ij} \quad (13)$$

$$v_l \geq 0 \quad \forall l \in L. \quad (14)$$

La formulation linéaire est équivalente à celle de Spiess et Florian (1989) en termes de flots de passagers. Ici on cherche à affecter la demande aux itinéraires optimaux, tandis que Spiess et Florian affectent la demande aux stratégies optimales.

### 1.2.4. Résolution du problème

On écrit de nouveau le problème (P1) en exprimant dans la fonction objectif (1) les variable  $v_l$  en fonction des variable  $V_{ij}$  en utilisant la contrainte (3). On obtient ainsi le problème (P4) :

$$\underset{\{x_l, v_l, V_{ij}\}}{\text{Min}} \sum_{(i,j) \in W} V_{ij} \left\{ \sum_{l \in S_{ij}} \frac{t_l x_l f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \right\}. \quad (15)$$

Sous contraintes : (2), (3), (4), (5) et (6).

La résolution de (P4) se fait en résolvant les deux problèmes suivants :

- ✓ Un problème hyperbolique, pour sélectionner l'ensemble des lignes attractives pour chaque section de route  $(i, j) \in W$ . Nous obtenons ainsi les valeurs des variables  $x_l$ .
- ✓ L'affectation des flots  $g_i$  sur les sections de routes du réseau qui va nous donner les valeurs des variables  $V_{ij}$ . Ensuite à l'aide des valeurs des variables  $x_l$  et  $V_{ij}$  nous calculons les valeurs des variables  $v_l$ , flots des passagers sur les sections de lignes  $l$ .

Le problème est donc séparable, à savoir que la sélection des lignes attractives est indépendante de l'affectation des flots.

La résolution du problème d'affectation de passagers peut se décomposer en 3 étapes :

- ✓ 1<sup>ère</sup> étape : résolution de problèmes hyperboliques.
- ✓ 2<sup>ème</sup> étape : affectation aux sections de routes.
- ✓ 3<sup>ème</sup> étape : affectation aux sections de lignes.

### 1.2.4.1. 1<sup>ère</sup> étape : Résolution de problèmes hyperboliques

Comme le problème est séparable, nous calculons tout d'abord les valeurs des variables  $x_l$  à l'aide du problème hyperbolique (P5).

Le problème de calcul des  $x_l$  est (P5) :

$$\underset{\{x_l\}}{\text{Min}} \sum_{(i,j) \in W} \left\{ \frac{\sum_{l \in S_{ij}} t_l x_l f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \right\}. \quad (16)$$

Sous contraintes : (5).

Étant donné que l'on suppose le réseau non-congestionné, l'ensemble optimal des lignes attractives associées à une paire  $(i, j)$  donnée est indépendant de l'origine et des nœuds de la paire  $(i, j)$ . Ainsi on a  $|W|$  problèmes hyperboliques de la forme de (P6) :

$$\underset{\{x_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in S_{ij}} \frac{t_l x_l f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l}. \quad (17)$$

Sous contraintes : (5).

Ainsi pour une paire  $(i, j)$  donnée, la résolution se fait de la façon suivante :

$$\text{Soit } R_{\bar{X}} = \frac{\sum_{l \in S_{ij}} t_l x_l f_l + \alpha}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}, \text{ la valeur optimale du problème.}$$

Et  $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , ensemble des variables  $x_l$  associées aux lignes communes de la paire  $(i, j)$ .

- ✓ On ordonne les temps déplacement des sections de lignes tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  et on prend  $\bar{X} = (1, 0, 0, \dots)$ .
- ✓ On calcule  $R_{\bar{X}}$ .
- ✓ Puis on calcule  $R_X$  avec  $X = (1, 1, 0, 0, \dots)$ .
- ✓ Comparaison : Si  $R_X > R_{\bar{X}}$ , on arrête et la solution est  $\bar{X}$ .

Sinon on pose  $\bar{X} = X$  et on calcule  $R_X$  avec  $X = (1,1,1,0,\dots)$ .

- ✓ On continue de cette manière jusqu'à ce que  $R_X > R_{\bar{X}}$  ou bien une fois le vecteur  $X = (1,1,1,\dots,1)$  atteint, auquel cas la solution est  $\bar{X} = X$ .

La démonstration de la validité de cet algorithme est faite en annexe B.

#### 1.2.4.2. 2<sup>ème</sup> étape : Affectation aux sections de routes

Après avoir déterminé les ensembles de lignes attractives pour chaque paire  $(i, j) \in W$ , on définit un nouveau graphe  $G''(N, W)$ ,  $N$ , l'ensemble des nœuds, et  $W$ , l'ensemble des sections de routes. Ainsi les lignes communes entre deux nœuds  $i$  et  $j$  seront représentées par un seul arc entre ces deux nœuds.

Nous avons :

$$t_{ij} = \frac{\sum_{l \in S_{ij}} t_l f_l}{f_{ij}}$$

$t_{ij}$  : temps moyen à bord de la section de route entre les nœuds  $i$  et  $j$ .

$f_{ij}$  : somme des fréquences des lignes communes choisies de la paire  $(i, j)$ .

$V_{ij}$  : flot sur la section de route de la paire  $(i, j)$ .

En utilisant les  $x_l$ , on remplace  $t_l$ ,  $f_l$  et  $v_l$  par  $t_{ij}$ ,  $f_{ij}$  et  $V_{ij}$  dans (P4).

On obtient ainsi le problème d'affectation « Tout-ou-rien » suivant :

(P7) :

$$\text{Min}_{\{V_{ij}\}} \sum_{(i,j) \in W} V_{ij} \left( t_{ij} + \frac{\gamma}{f_{ij}} \right). \quad (18)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{(i,j) \in S_i^+} V_{ij} + g_i = \sum_{(j,i) \in S_i^-} V_{ji} \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (19)$$

$$V_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in W \quad (20)$$

$S_i^+$  : l'ensemble des sections de routes sortant du nœud  $i$ .

$S_i^-$  : l'ensemble des sections de routes entrant au nœud  $i$ .

Nous obtenons un problème de plus courts chemins pour chaque origine vers toutes les destinations, avec le coût sur la section de route  $(i, j)$  égal à  $t_{ij} + \frac{\alpha}{f_{ij}}$ .

#### 1.2.4.3. 3<sup>ème</sup> étape : Affectation aux sections de lignes

Une fois (P7) résolu, on obtient les flots sur les sections de lignes par proportion :

$$\text{Pour } x_l = 1, \quad v_l = \frac{f_l V_{ij}}{f_{ij}} \quad \forall l \in S_{ij}, (i, j) \in W. \quad (21)$$

Sinon,  $v_l = 0$ .

#### 1.2.5. Implantation et application

Les auteurs ont programmé l'algorithme en FORTRAN 77 et implanté sur MICROVAX II, VAX 11/780 et VAX 8600. Ils ont testé le programme en analysant le réseau de transport de Santiago au Chili, qui représente 245 nœuds et 446 lignes. Ce réseau génère 75103 sections de lignes et 19078 sections de routes. Le temps d'exécution complet a été de 100 secondes qui se composent de :

- ✓ Pour la construction du réseau, 60.0 secondes.
- ✓ Pour l'affectation aux sections de routes, 29.5 secondes.
- ✓ Pour l'affectation aux sections de lignes 10.5 secondes.

Si on veut analyser le comportement d'un réseau donné pour différentes demandes, la construction du réseau  $G''(N, W)$  ne se fait qu'une seule fois et non à chaque itération. Ainsi une itération se fait en 40 secondes.

En comparaison, pour le même réseau (Santiago au Chili), l'algorithme de Spiess et Florian (1989) s'exécute en 263 secondes.

### **1.2.6. Les faiblesses du modèle**

Bien qu'il soit efficace en résolution, le modèle de de Cea et Fernandez (1989) présente des faiblesses, en ne reflétant pas assez la réalité. En effet, il manque dans la fonction objectif un terme traduisant l'inconfort des passagers résultant de la surcharge des autobus. Lorsque le nombre de passagers excède le nombre de sièges disponibles, cela n'a pas d'impact dans le modèle sur le choix des itinéraires empruntés par les passagers. Cela ne semble pas très naturel dans la mesure où le temps perçu par un voyageur assis n'est pas le même que le temps perçu par un voyageur debout. Une personne voyageant debout a tendance à ressentir le temps de déplacement plus long que si elle était assise. Aussi, le modèle ne permet pas de répartition des passagers sur des itinéraires dont les temps perçus sont proches. Pour une origine-destination donnée, toute la demande est affectée sur le plus court chemin. Il n'y a pas d'hétérogénéité dans le comportement des passagers, ils vont tous prendre le même chemin quelque soit la congestion de ce dernier.

Connaissant ces faiblesses, nous tâcherons par la suite de proposer un modèle d'affectation de passagers plus réaliste qui tienne compte de la congestion et permet la répartition de passagers sur d'autres chemins équivalents proches.

## **CHAPITRE 2 : MODÈLE D'AFFECTATIONS DE PASSAGERS**

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les modèles d'affectation de passagers étudiés dans la littérature présentent certains manques au niveau du comportement des voyageurs. Cependant, le modèle proposé par de Cea et Fernandez (1989) possède certaines bonnes idées, comme notamment le regroupement des lignes communes entre deux arrêts en un seul arc après avoir sélectionné le sous-ensemble de lignes ayant le petit coût (temps d'attente + temps de déplacement) entre ces deux arrêts. Pour notre modèle d'affectation de passagers, nous allons nous inspirer de ce modèle pour en construire un plus réaliste.

### **2.1. Proposition de modèle**

Les améliorations que nous allons apporter au modèle de de Cea et Fernandez (1989) portent sur les facteurs suivants :

- ✓ L'effet de la surcharge dans les autobus.
- ✓ La construction d'un réseau permettant un traitement plus efficace.
- ✓ Une répartition pluraliste des voyageurs dans le réseau.

#### **2.1.1. Prise en compte de la surcharge dans les autobus**

Dans notre cas, nous voulons imposer une pénalité sur le chargement des véhicules. Pour cela, il faut ajouter un terme de pénalité dans la fonction objectif correspondant à l'augmentation du temps perçu quand l'autobus est surchargé.

##### **2.1.1.1. Modèle proposé**

En se basant sur le modèle (P3) de de Cea et Fernandez (1989) et en lui ajoutant un terme de pénalité, nous obtenons (P8). Pour chaque origine  $o$  le problème est :

$$(P8) \quad \underset{\{v_l, w_{ij}, V_s^b\}}{Min} \sum_{l \in L} v_l t_l + \sum_{(i,j) \in W} w_{ij} + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^b). \quad (22)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{l \in L_i^+} v_l + g_i = \sum_{l \in L_i^-} v_l \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (23)$$

$$v_l \leq f_l w_{ij} \quad \forall (i,j) \in W, l \in S_{ij} \quad (23)$$

$$V_s^b = \sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} v_l \quad \forall b \in B, \forall s \in S^b \quad (24)$$

$$v_l \geq 0 \quad \forall l \in L. \quad (25)$$

Avec,

$B$  : l'ensemble des lignes de bus.

$b$  : une ligne d'autobus.

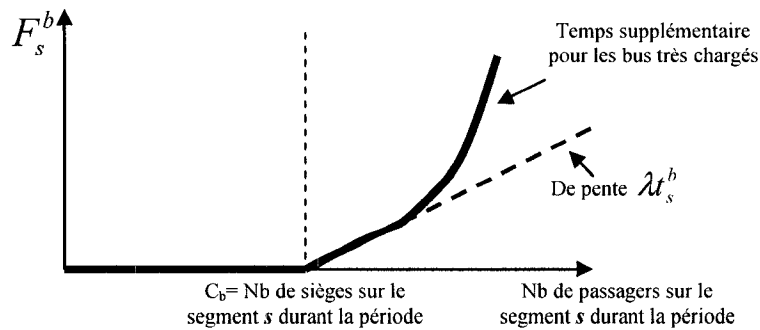
$O$  : l'ensemble des origines.

$S^b$  : l'ensemble des segments de la ligne de l'autobus  $b$ , où un segment est le lien entre deux arrêts consécutifs. Voir la figure 2.2 illustrant des segments.

$L_b$  : l'ensemble des sections de lignes de la ligne de l'autobus  $b$ .

$V_s^b$  : flot de passagers sur le segment  $s$  de la ligne  $b$ , c'est-à-dire sur l'ensemble des sections de lignes de la ligne  $b$  empruntant  $s$ .

$F_s^b$  : fonction de pénalité, en minutes, sur le segment  $s$  de la ligne  $b$  (Cf. figure 2.1).



**Figure 2.1 : Fonction de pénalité**

Dans le cas, nous allons utiliser une fonction  $F_s^b$  linéaire par morceaux.

$t_s^b$  : temps de parcours du segment  $s$  de la ligne  $b$ .



$\lambda$  : proportion de la pénalité par rapport au temps de parcours de l'ordre de 0.4, car nous supposons qu'un voyageur debout perçoit un temps de parcours 40% plus long.

Les contraintes du problème complet sont séparables par origine. Toutefois, ces problèmes sont liés par le terme de pénalité dans l'objectif  $\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^b)$ .

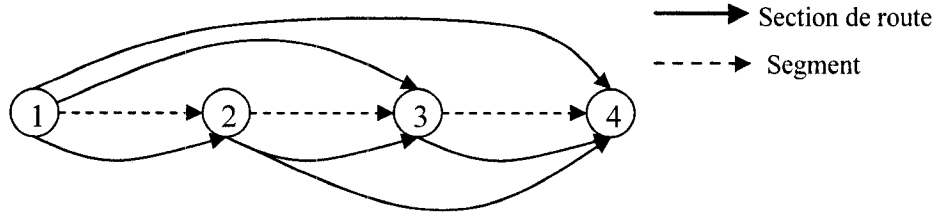


Figure 2.2 : Sections de routes et segments

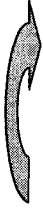
#### 2.1.1.2. Idée de résolution

L'algorithme de de Cea et Fernandez (1989) qui affecte les passagers sans pénalité est composé de 3 parties:

- ✓ Dans un premier temps, les problèmes hyperboliques pour la sélection des lignes utilisées dans le cas de lignes communes.
- ✓ Dans un second temps, pour chaque origine, un problème de plus courts chemins pour affecter la demande aux sections de routes.
- ✓ Puis, dans un troisième temps, le calcul des flots sur les sections de lignes par proportion.

Or, dans notre cas, avec la pénalité de chargement, le choix des lignes communes dépend du temps perçu qui dépend des flots présents sur ces lignes. Et l'affectation, à savoir le calcul des flots, se fait sur les lignes sélectionnées dans l'étape précédente. Ainsi notre problème n'est pas séparable par coût à cause du terme de pénalité. Pour corriger cela, nous procéderons par boucle jusqu'à convergence des flots  $V_{ij}$ . Nous noterons  $V_{ij}^k$  le flot  $V_{ij}$  à l'itération  $k$  et  $v_l^k$  le flot  $v_l$  à l'itération  $k$ . À chaque itération  $k$ , nous intégrerons le terme de pénalité avec le terme de temps moyen à bord afin d'obtenir un modèle proche de celui de de Cea et Fernandez (1989) et donc séparable par coût.

L'algorithme de résolution repose sur un principe proche de celui de de Cea et Fernandez (1989), à savoir que l'on conserve les trois étapes, moyennant quelques modifications, et une boucle sera effectuée entre les étapes 1 et 2 jusqu'à convergence des flots  $V_{ij}^k$ .



- ✓ 1<sup>ère</sup> étape : Un problème hyperbolique avec une pénalité constante (pénalité calculée à l'aide des résultats de flots trouvés à l'itération précédente), pour chaque paire  $(i, j)$  entre lesquelles il y a des lignes communes.
- ✓ 2<sup>ème</sup> étape : Un problème de flot par origine sur les sections de routes, non-linéaire et avec une pénalité non-constante.
- ✓ 3<sup>ème</sup> étape : Affectation des flots sur les sections de lignes par proportion.

### 2.1.1.3. Principe de l'algorithme

Nous allons voir le calcul de la pénalité pour les lignes communes. Au départ, pour la première itération, on suppose un chargement vide. À la fin de chaque itération  $k$ , on calcule pour les lignes communes le terme de pénalité par passager supposé constant. Cette pénalité pour les lignes communes utilisée lors de l'itération  $k+1$  dépend des flots trouvés à l'itération  $k$ .

Par définition, la pénalité totale à l'itération  $k+1$  est égale à  $\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1})$ .

Avec,  $V_s^{b,k}$  : flot de passagers sur le segment  $s$  de la ligne  $b$  lors de l'itération  $k$ .

$\Delta V_s^{b,k+1} = V_s^{b,k+1} - V_s^{b,k}$ , variation de flot entre les itérations  $k+1$  et  $k$ .

Par approximation linéaire, nous avons

$$\underbrace{\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1})}_{\text{Pénalité à l'itération } k+1} \approx \underbrace{\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k})}_{\text{Pénalité à l'itération } k \text{ (constante)}} + \underbrace{\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s'^b(V_s^{b,k}) \Delta V_s^{b,k+1}}_{\text{Dérivée de } F_s^b \text{ au point } V_s^{b,k}}. \quad (26)$$

Pour le calcul de la pénalité à l'itération  $k+1$ , le terme de pénalité à l'itération  $k$  est une constante.

Nous avons par définition  $V_s^{b,k+1} = \sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} v_l^{k+1}$ , donc  $\Delta V_s^{b,k+1} = \sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} \Delta v_l^{k+1}$ , avec

$$\Delta v_l^{k+1} = v_l^{k+1} - v_l^k$$

On substitue  $\Delta V_s^{b,k+1}$  par  $\sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} \Delta v_l^{k+1}$  et on obtient

$$\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1}) = Cte_1 + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} \left( \sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} \Delta v_l^{k+1} \right) F_s'^b(V_s^b). \quad (27)$$

Dans l'équation (27),  $Cte_1$  représente une constante.

En inversant les sommations de  $s$  et  $l$  dans (27), on obtient,

$$\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1}) = Cte_1 + \sum_{b \in B} \sum_{l \in L_b} \sum_{s \in S^b, s \subseteq l} F_s'^b(V_s^{b,k}) \sum_{o \in O} \Delta v_l^{k+1}. \quad (28)$$

Lors de l'itération  $k+1$ ,  $v_l^k$  est une constante et  $v_l^{k+1}$  est une variable. On développe

$\Delta v_l^{k+1}$  et on envoie le terme avec  $v_l^k$  dans la constante  $Cte_1$  qui devient  $Cte_2$ , on obtient

$$\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1}) = Cte_2 + \sum_{b \in B} \sum_{l \in L_b} \sum_{s \in S^b, s \subseteq l} F_s'^b(V_s^{b,k}) \sum_{o \in O} v_l^{k+1}. \quad (29)$$

Or comme  $\sum_{b \in B} \sum_{l \in L_b}$  est équivalent à  $\sum_{l \in L}$  et on a donc

$$\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k+1}) = Cte_2 + \sum_{l \in L} \left( \sum_{s \in S^b, s \subseteq l} F_s'^b(V_s^{b,k}) \right) \sum_{o \in O} v_l^{k+1}. \quad (30)$$

**Remarque :** Dans le membre de droite de l'équation précédente, l'indice  $b$  n'est pas explicitement défini. Il s'agit de l'unique ligne de bus qui passe sur la section de ligne  $l$ . Il en est de même pour les équations semblables qui suivent.

On pose  $p_l^{k+1} = \left( \sum_{s \in S^b, s \subseteq l} F_s'^b(V_s^{b,k}) \right)$ , pénalité marginale par passager sur la section de ligne

$l$  pour l'itération  $k+1$ .

On obtient donc par substitution :

$$\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^b) = Cte_2 + \sum_{l \in L} p_l^{k+1} \sum_{o \in O} v_l^{k+1}. \quad (31)$$

Ainsi nous pourrons, lors de l'étape 1, intégrer le terme  $p_l^k$  dans  $t_l^k$ , car il s'agit d'un temps par passager.

**Lors d'une itération  $k$  :**

- ✓ 1<sup>ère</sup> étape : on sélectionne les lignes attractives. Tout d'abord, on ajoute les termes de pénalité  $p_l^k$  calculés à l'aide des résultats obtenus à l'itération précédente. En partant de (P6), on a donc pour chaque route section  $(i, j) \in W$  un problème hyperbolique de la forme de (P9).

(P9) :

$$\underset{\{x_l^k\}}{\text{Min}} \sum_{l \in S_{ij}} \frac{(t_l^k + p_l^k) x_l^k f_l + \alpha}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^k f_l} \quad (32)$$

Sous contraintes :

$$x_l^k = \{0,1\} \quad \forall l \in S_{ij} \quad (33)$$

$x_l^k$  : valeur binaire de  $x_l$  à l'itération  $k$ .

Étant donné que  $(t_l^k + p_l^k)$  est une constante, on intègre donc  $p_l^k$  dans  $t_l^k$  ( $t_l^k \leftarrow t_l^k + p_l^k$ ) et on se retrouve avec un problème hyperbolique similaire à celui de de Cea et Fernandez (1989). On utilise donc le même algorithme de résolution (Cf. section 1.2.4.1.), qui fournit les valeurs de  $x_l^k$  qui permettent de calculer celles des  $t_{ij}^k$  et des  $f_{ij}^k$  nécessaires à (P10).

$t_{ij}^k$  : temps de parcours par passager sur la section de route  $(i, j)$  à l'itération  $k$ .

$f_{ij}^k$  : fréquence sur la section de route  $(i, j)$  à l'itération  $k$ . Le sous-ensemble des lignes attractives n'est pas le même d'une itération à l'autre car il dépend de la congestion à l'itération précédente.

On pose aussi  $p_{ij}^k = \sum_{l \in S_{ij}} \frac{x_l^k f_l}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^k f_l} p_l^k$ , pénalité marginale par passager sur la section de route  $(i, j)$  composée de lignes communes pour l'itération  $k$  et considérée constante.

- ✓ 2<sup>ème</sup> étape : problème de flot non-linéaire en considérant le terme de pénalité qui, contrairement à l'étape 1, est non-constant. En partant de (P7) et en ajoutant le terme de pénalité totale, on obtient (P10).

(P10) :

$$\underset{\{V_s^b, V_{ij}^k\}_{(i,j) \in W}}{\text{Min}} \sum_{(i,j) \in W} V_{ij}^k (t_{ij}^k + \frac{\gamma}{f_{ij}^k}) + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k}) \quad (34)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{(i,j) \in S_i^+} V_{ij}^k + g_i = \sum_{(j,i) \in S_i^-} V_{ji}^k \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (35)$$

$$V_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in W. \quad (36)$$

Nous avons dans ce cas, des blocs de contraintes par origine. Les contraintes sont séparables par origine, mais pas l'objectif. Nous avons  $V_s^{b,k} = \sum_{o \in O} \sum_{l \in L_b, s \subseteq l} \frac{x_l^k f_l}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^k f_l} V_{ij}^k$ .

Dans ce cas, nous proposons de faire une boucle à l'intérieur de l'étape 2 sur les origines en supposant à chaque itération les flots des autres origines constants. Par exemple, pour une origine  $o$  donnée on aura dans l'objectif le terme  $V_s^{b,k}$ , défini comme étant le flot sur le segment  $s$  du bus  $b$  venant de l'origine  $o$  (flot variable) plus les flots sur le segment  $s$  du bus  $b$  venant des origines autres que  $o$  (flots considérés constants)

À la fin de l'itération  $k$ , on retourne à l'étape 1 pour l'itération suivante  $k+1$ .

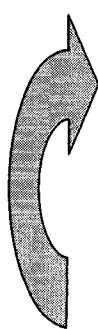
- ✓ 3<sup>ème</sup> étape : on répartit les flots sur les sections de lignes par proportion comme vu à la section 1.2.4.3.

### 2.1.2. Réseau efficace pour l'optimisation

La configuration du réseau en sections de ligne présentée dans l'article de de Cea et Fernandez (1989) (Cf. figure1.1) génère un nombre important d'arcs et donc de variables dans le problème à résoudre. De plus, nous avons vu dans le paragraphe précédent que le coût de surcharge n'est pas séparable avec une telle représentation du réseau. Nous allons voir dans cette partie comment modifier la configuration afin de diminuer le nombre de variables, ce qui améliorera l'efficacité de la résolution du problème et aussi le rendra séparable en présence du coût de la surcharge. Dans un premier temps regardons ce que l'on aurait avec un problème de flots à coût non-linéaire.

#### 2.1.2.1. Cas : Problème de flot non-linéaire à coûts séparables

Nous allons présenter le principe de résolution dans le cas où nous aurions un algorithme pour un problème de flot non-linéaire à coûts séparables. Les étapes sont :

- 
- ✓ 1<sup>ère</sup> étape : la première étape reste la même que précédemment à savoir un problème hyperbolique avec une pénalité par passager constante, pour chaque paire  $(i, j)$  entre lesquelles il y a des lignes communes.
  - ✓ 2<sup>ème</sup> étape : un problème de flot non-linéaire par origine avec une pénalité par passager non-constante sur les segments des lignes non-communes et une pénalité par passager constante sur les sections de routes des lignes communes.
  - ✓ 3<sup>ème</sup> étape : de même que précédemment, affectation des flots sur les section de lignes par proportion.

Pour les portions de lignes non-communes, nous allons utiliser un réseau de segments de lignes défini de la façon illustrée par la figure 2.3, l'explication vient dans la paragraphe suivant.

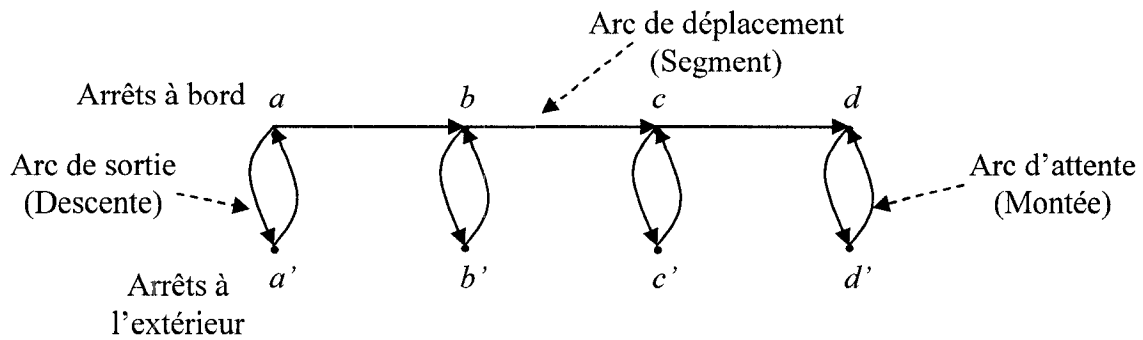


Figure 2.3 : Réseau de segments

Les nœuds correspondant à chaque arrêt de la ligne sont dédoublés. Pour chaque arrêt, nous avons un nœud correspondant à l'extérieur du bus qui représente le point de montée ou de descente du bus et nous avons aussi un nœud correspondant à bord du bus où le passager reste dans le bus. Le flot sur le segment  $s$  de la ligne  $b$  n'est rien d'autre que la variable  $V_s^b$  définie précédemment. Les pénalités sont ainsi séparables par segment.

Pour les lignes communes, la pénalité marginale par passager est considérée constante sur les sections de routes lors de l'étape 2. Le flot trouvé sur ces lignes communes sera réparti sur tous les segments composants ces lignes communes. Ceux-ci permettront de calculer la pénalité marginale de surcharge pour chaque ligne commune en fonction de ce nouveau flot qui sera utilisée à la première étape lors de la prochaine itération. Du point de vue structure de données, lors de l'étape 2, les parties communes des lignes d'autobus seront représentées par des sections de routes et les parties non-communes seront représentées par des segments. Nous avons comme variables pour cette 2<sup>ème</sup> étape  $V_s^{b,k}$  et  $V_{ij}^k$ .

Ainsi dans l'objectif, nous aurons pour les lignes communes le terme suivant :

$$\sum_{(i,j) \in W} V_{ij}^k (t_{ij}^k + \frac{\gamma}{f_{ij}^k} + p_{ij}^k). \quad (37)$$

Et nous aurons pour les lignes non-communes le terme suivant :

$$\sum_{(i,j) \in W} V_{ij}^k (t_{ij}^k + \frac{\gamma}{f_{ij}^k}) + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b (V_s^{b,k}). \quad (38)$$

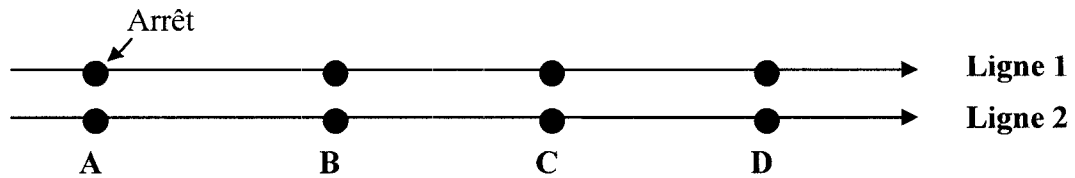
Pour les lignes non-communes, la pénalité est séparable par segment.

Note : Il est utile d'avoir aussi le réseau de segments pour les lignes communes pour conserver l'information par segment. Après la résolution du problème de flot à la deuxième étape, nous calculons les flots sur les segments et les pénalités associées que nous pouvons conserver dans ce dernier réseau.

#### 2.1.2.2. Définition de lignes communes

Par définition, une portion de lignes communes est une partie d'itinéraire de deux lignes ou plus, utilisant le même itinéraire entre deux arrêts. Nous considérons seulement les portions maximales, c'est-à-dire les portions les plus longues possibles. La suite d'arrêts doit être parcourue dans le même ordre pour toutes les lignes. Nous considérons  $L$ , un ensemble de lignes communes pour une paire d'arrêts et  $L_l$ , le sous-ensemble formé par les lignes sélectionnées par le problème hyperbolique pour minimiser l'espérance du temps de parcours. Pour voyager entre ces deux arrêts, le passager monte dans le premier bus qui se présente à l'arrêt parmi les lignes de  $L_l$ .

*Exemple 1*



Les lignes 1 et 2 présentent la même suite d'arrêts  $\{A, B, C, D\}$ .

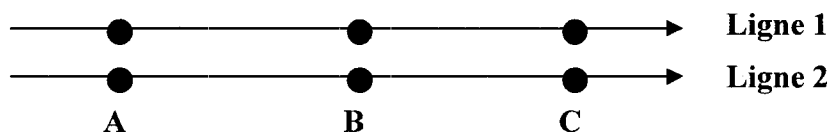


Sur cette portion de lignes communes, nous avons 6 paires d'arrêts avec lignes communes :

$A \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow D$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow D$ ,  $C \rightarrow D$

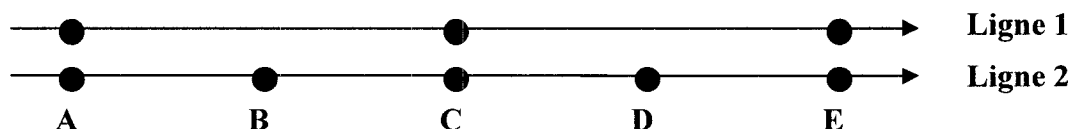
Cependant nous procédons un à choix restrictifs des lignes communes. Étant donné que l'algorithme de flot de passagers est moins efficace sur les lignes communes que sur les lignes non-communes, nous préférons considérer le moins de lignes communes possibles. Voici deux exemples de portion de lignes communes que nous considérerons.

### Exemple 2



Les lignes 1 et 2 présentent la même suite d'arrêts  $\{A, B, C\}$ .

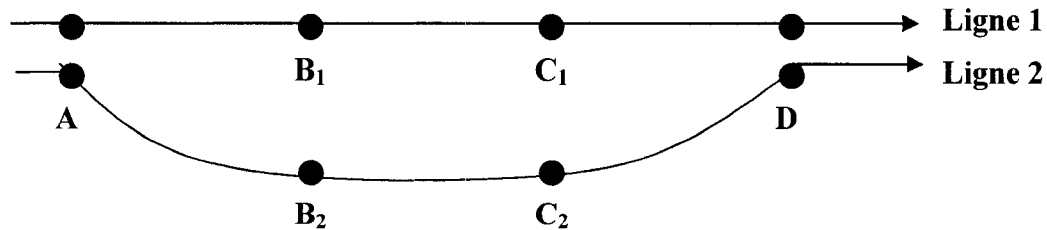
### Exemple 3



La suite d'arrêts de la ligne 1  $\{A, C, E\}$  est un sous-ensemble de la suite d'arrêts de la ligne 2  $\{A, B, C, D, E\}$ . La ligne 1 représente une ligne à arrêts limités.

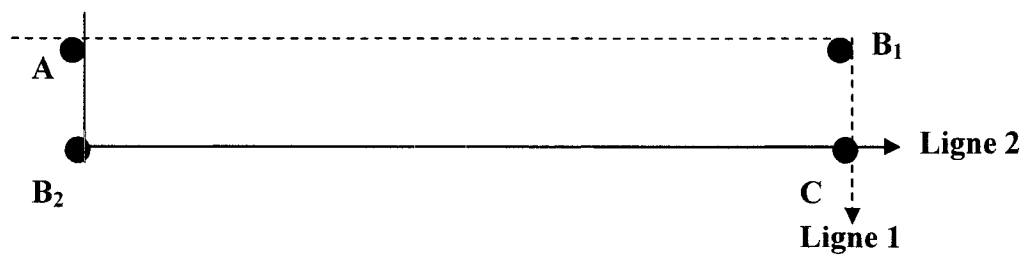
Voici deux exemples de portion de lignes communes que nous ne considérerons pas dans notre travail de recherche.

*Exemple 4*



Les lignes 1 et 2 n'empruntent pas le même itinéraire.

*Exemple 5*



Au point A, les arrêts des lignes 1 et 2 ne sont pas sur le même côté de la rue et donc il n'est pas aussi facile pour le passager de prendre pas le premier bus qui passe à l'arrêt A pour se rendre à l'arrêt C car selon le côté de la rue où il se trouve en A il peut se retrouver à traverser la rue avant de monter dans l'autobus. Comme nous avons exclu l'exemple 5, il nous faut aussi exclure l'exemple 4 car dans notre réseau les arrêts sont identifiés par intersection et donc nous ne pouvons pas distinguer les portions de type exemple 4 de celles de type exemple 5.

### 2.1.2.3. Représentation du réseau

À première vue, nous pourrions représenter par des sections de routes toutes les portions de lignes communes et par des segments toutes les lignes non-communes. Cependant, comme les lignes communes ne le sont pas tout le long mais sur une partie seulement, notre idée serait de représenter par des sections de routes les portions communes de ces lignes et par des segments le reste du réseau (Cf. figure 2.4).

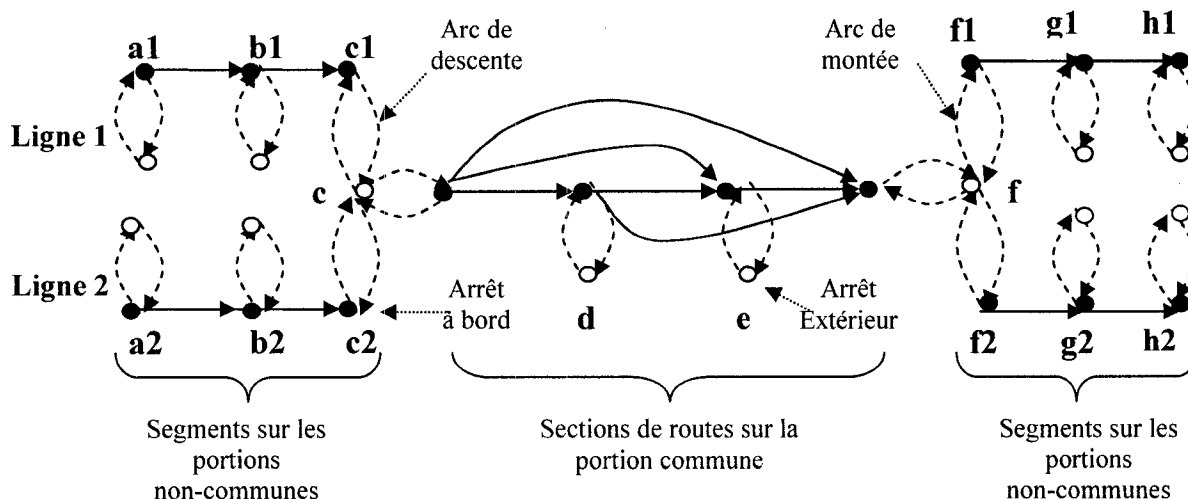


Figure 2.4 : Réseau de sections de routes et de segments

Nous remarquons un défaut dans cette représentation. Supposons une personne qui monte sur la ligne 2 à l'arrêt a2 et qu'elle veut se rendre à l'arrêt h2. La personne ne peut pas rester dans l'autobus pour s'y rendre car elle se trouve contrainte de descendre à l'arrêt c pour embarquer sur une ligne commune puis en descendre à l'arrêt f pour remonter sur la ligne 2 pour arriver à destination en h2. Pour corriger ce défaut, nous avons décidé de représenter la portion commune par des segments en plus des sections de routes (Cf. figure 2.5).

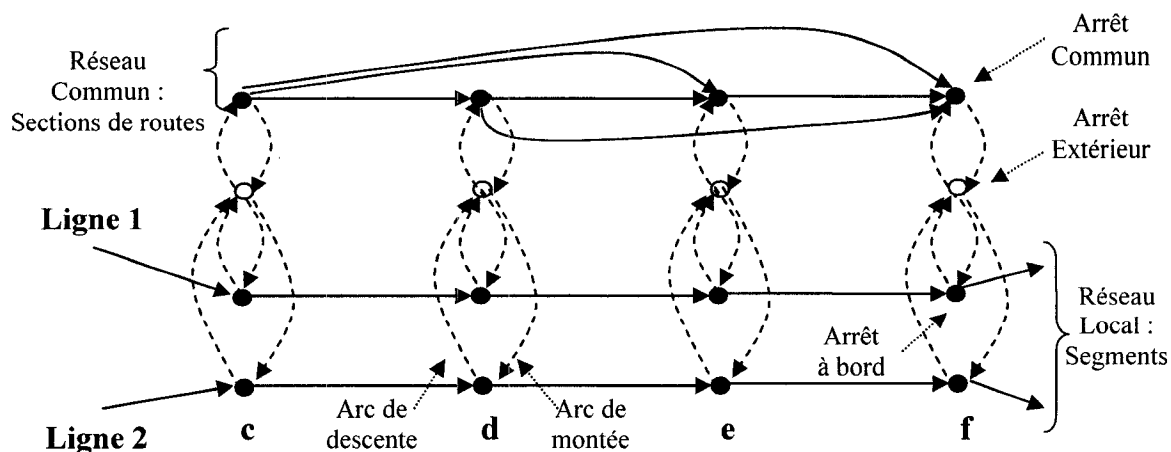


Figure 2.5 : Réseau corrigé de sections de routes et de segments

Ainsi la personne pourra se rendre de l'arrêt a2 à l'arrêt h2 en restant dans le même autobus puisqu'elle se déplacera dans le réseau de segments. Pour la suite de notre étude, nous avons opté pour la configuration réseau illustrée sur la figure 2.5. Un réseau de segments représente toutes les lignes d'autobus (communes et non-communes) et, pour les portions communes, nous avons des sections de routes représentant les arcs communs. Malgré le fait que nous retenons ce réseau pour nos travaux de recherche, il n'est pas parfait et présente encore une faiblesse.

#### **2.1.2.4. Faiblesse du réseau**

Dans la modélisation précédente, nous constatons un problème au niveau de l'interaction entre le réseau de segments et les sections de routes et, plus précisément, au moment du débarquement des sections de routes. En effet, prenons l'exemple d'une portion commune de trois lignes où un passager arrivant sur la ligne 1 (en amont de la section de lignes communes) veut se rendre vers une destination desservie par la ligne 2 (en aval de la section de lignes communes). Une fois arrivé à l'arrêt c de la ligne 1, il décide de descendre et d'embarquer sur la section de route entre c et f parce que c'est le chemin le plus rapide pour se rendre de c à f. Puis il débarque de la section de route à l'arrêt f, pour ensuite prendre la ligne 2 en f pour se rendre à destination. Sachant que la section de route entre c et f est utilisée par les lignes 1, 2 et 3, nous savons qu'il n'a pas utilisé la ligne 1 car il a justement débarqué de cette dernière, mais nous ne savons pas dans laquelle des lignes 2 ou 3 il a embarqué pour se rendre à l'arrêt f. Ainsi dans notre modélisation, que le passager ait emprunté la ligne 2 ou 3 sur la section de route section entre c et f, il doit descendre en f pour ensuite embarquer ou réembarquer sur la ligne 2.

Si le passager a utilisé la ligne 3 sur ce trajet, cela semble logique qu'il descende en f pour prendre la ligne 2 ensuite, mais si il a utilisé la ligne 2 entre c et f, le passager ne devrait pas descendre en f et continuer jusqu'à destination. Cependant, notre configuration n'offre pas cette dernière option et contraint le passager à descendre en d

même s'il se trouve déjà sur la ligne 2 et à remonter sur la ligne 2, ce qui allonge son temps de parcours de la durée d'attente de la ligne 2 à l'arrêt f.

Pour résoudre ce problème nous pouvons nous inspirer de de Cea et Fernandez (1989). Leur modèle est basé sur un réseau de sections de routes. Les temps d'attente sont inclus dans le coût des sections de routes. À chaque fois que le passager quitte une section de route pour une autre, cela se traduit par un changement de ligne. Ainsi, le problème de débarquement de la section de route commune vu précédemment n'existe pas puisque l'optimisation (minimisation du coût) fera en sorte d'éviter au passager de réembarquer dans une ligne dont il vient de débarquer. Cependant, cette solution a un inconvénient car elle augmente considérablement le nombre d'arcs dans le réseau et donc le nombre de variables augmente ce qui allongera le temps d'exécution de l'algorithme.

Une autre solution consisterait de partir de la modélisation de la figure 2.5 et à ajouter, pour chaque arrêts communs excepté le dernier, des sections de routes vers le dernier arrêt à bord (l'intérieur de l'autobus) de chaque ligne (Cf. Figure 2.6, route sections entre c et f, entre d et f et entre e et f). Dans ce cas, la faible augmentation du nombre d'arcs affecterait peu le temps d'exécution de l'algorithme.

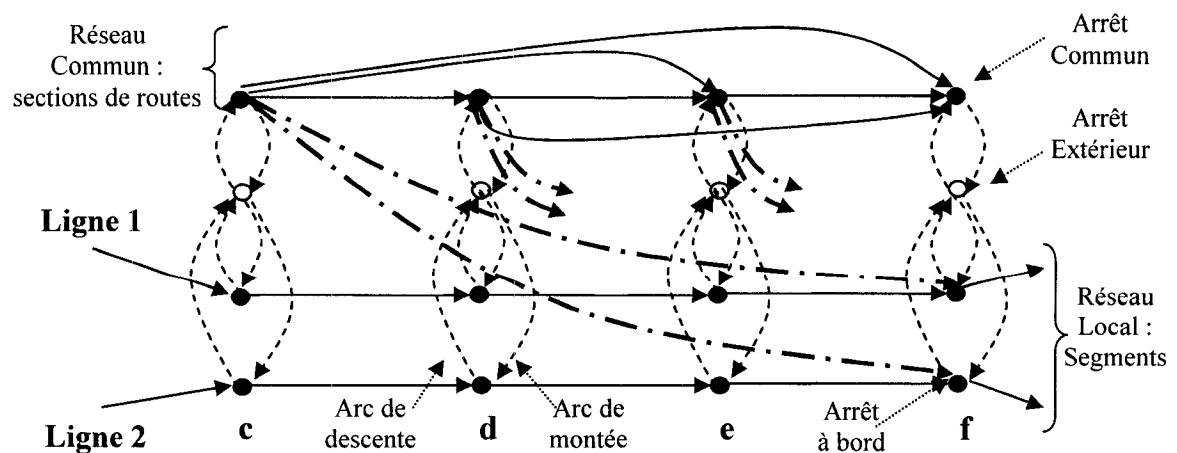


Figure 2.6 : Réseau amélioré de sections de routes et de segments

Cependant, il faut résoudre un autre problème hyperbolique sur ces sections de routes supplémentaires en tenant compte du temps d'attente à la fin de la section de route pour les lignes différentes de la ligne de destination car il y a un changement de ligne. Par exemple, pour la section de route entre l'arrêt c commun et l'arrêt f de la ligne 1, nous devons considérer dans le problème hyperbolique les temps suivants.

Pour la ligne 1 : temps d'attente de la ligne 1 + temps de déplacement sur la ligne 1.

Pour le ligne 2 : temps d'attente de la ligne 2 + temps de déplacement sur la ligne 2 + temps d'attente de la ligne 1.

Pour la ligne 3 : temps d'attente de la ligne 3 + temps de déplacement sur la ligne 3 + temps d'attente de la ligne 1.

### **2.1.3. Répartition pluraliste des flots**

Comme nous l'avons signalé au chapitre 1, le modèle de de Cea et Fernandez (1989) ne répartit pas les flots sur le réseau. Tous les passagers d'une origine-destination donnée utilisent le plus court chemin. Toutefois, en pratique, les passagers se répartissent entre plusieurs bons chemins. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment modifier le modèle pour obtenir une répartition entre les meilleurs chemins. Soit  $A$  l'ensemble des arcs du réseau,  $R$  un ensemble de routes entre  $O$  et  $D$ ,  $D_{OD}$  la demande et  $v_a$  le flot sur l'arc  $a$  pour  $a \in A$ .

Nous définissons le temps perçu pour un arc  $a$  par  $\bar{t}_a$ . Il s'agit de la somme du temps de déplacement sur l'arc  $a$ , le temps d'attente avant  $a$  et du temps perçu supplémentaire dû à la charge. Nous considérons dans un premier temps que les  $\bar{t}_a$  sont constants. Le temps perçu supplémentaire  $p_a^k$  est calculé avec le flot de passagers sur l'arc  $a$  de l'itération précédente (Cf. section 2.1.1.3.).

Si les temps perçus de deux routes sont proches, le modèle du chapitre 1 concentre tous les passagers sur la route de temps minimum. En pratique, les passagers sont moins extrémistes et se répartissent en proportion inverse d'une fonction du temps perçu. Le temps perçu pour une route  $r \in R$  sera tout simplement  $\sum_{a \in W \cap r} \bar{t}_a$ .

**Idées :**

Les temps de parcours sont imprécis et les poids des facteurs varient un peu d'un individu à l'autre suivant le moment. Par exemple, en hiver, certains ont tendance à vouloir minimiser le temps d'attente extérieur. Nous considérons deux routes parallèles, c'est-à-dire deux itinéraires entre une même paire d'arrêts. Alors même si  $\bar{t}_1 \geq \bar{t}_2$ , certains individus choisissent la route 1.

Si  $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$ , les passagers se répartissent également sur les 2 routes.

Si  $\bar{t}_1 > \bar{t}_2$ , mais proche, alors la route 2 aura légèrement plus de passagers.

Si  $\bar{t}_1 > \bar{t}_2$ , mais loin, alors la plupart des passagers iront sur la route 2.

Cette répartition entre les routes donne lieu à une courbe de la forme suivante :

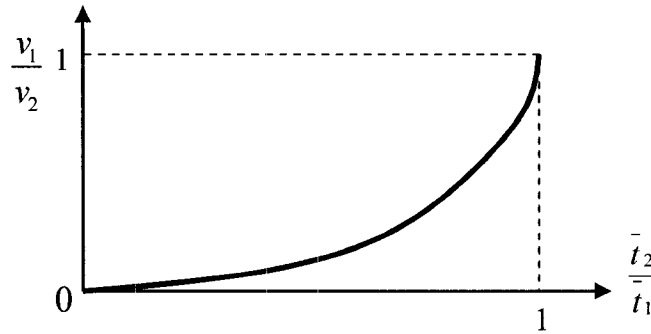


Figure 2.7 : Fonction de répartition

La relation entre le rapport des flots et celui des temps perçus peut être approximée par :

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^\beta, \text{ avec } \beta > 0 \quad (39)$$

Il suffit donc de calibrer  $\beta$  pour obtenir la courbure désirée.

### 2.1.3.1. Modèle Logit sur les routes

Nous allons introduire un modèle Logit qui produit une répartition, entre les routes reliant une paire O-D, correspondant à la relation (39). Notre modèle Logit qui comporte seulement le temps perçu comme facteur est défini de la façon suivante.

#### *Hypothèse de comportement :*

Le flot sur la route  $l$  est proportionnel à l'attraction de la route  $l$ .

$$v_l = A_l \cdot D_{OD} \quad (40)$$

#### *Coefficient d'attraction :*

Définissons  $A_l$  l'attraction de la route  $l$

$$A_l = \frac{\bar{t}_l^{-\alpha}}{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\alpha}} \text{ avec } \alpha < 0 \quad (41)$$

Si  $\alpha = -1$ , l'attraction est inversement proportionnelle au temps perçu.

Si  $\alpha$  est plus négatif, l'attraction est proportionnellement plus forte pour les petits temps perçus. À la limite, si  $\alpha \rightarrow -\infty$ , l'attraction du chemin de temps perçu minimum tend vers 1.

1. Si on supprime le dénominateur, on perd la propriété  $\sum_l A_l = 1$  mais le problème reste équivalent. L'objectif est le même à une constante près. Donc, pour la suite,

$$A_l = \bar{t}_l^{-\alpha}.$$

#### *Proposition :*

La répartition des passagers entre plusieurs routes reliant une paire O-D avec le modèle Logit produit un rapport entre les flots de 2 routes données (1 et 2) fourni par la

$$\text{relation } \frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^{\beta}, \text{ avec } \beta > 0.$$



**Preuve :**

Montrons que  $\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^\beta$ , avec  $\beta > 0$  pour deux routes (1 et 2) données joignant O-D  
est équivalent à  $A_l = \frac{\bar{t}_l^{-\beta}}{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta}}$ .

( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $A_l = \frac{\bar{t}_l^{-\beta}}{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta}}$ , pour toute route parallèle  $l$  donnée, i.e. joignant O-D

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_1 \cdot D_{OD}}{A_2 \cdot D_{OD}} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (42) \quad \text{On substitue } A_1 \text{ et } A_2 \text{ par leur expression en } t_l$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\bar{t}_1^{-\beta}}{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta}} \cdot \frac{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta}}{\bar{t}_2^{-\beta}} = \frac{\bar{t}_1^{-\beta}}{\bar{t}_2^{-\beta}} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^\beta. \quad (43)$$

( $\Rightarrow$ ) On suppose  $\frac{v_i}{v_j} = \left( \frac{\bar{t}_j}{\bar{t}_i} \right)^\beta$  pour tout couple  $(i, j)$  de routes parallèles parmi  $n$ .

On a donc  $\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^\beta$ , soit  $\frac{A_1}{A_2} = \left( \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right)^\beta$  résultant de l'équation (40).

$$A_1 \bar{t}_2^{-\beta} = A_2 \bar{t}_1^{-\beta}. \quad (44) \quad \text{Or comme } \sum_i A_i = 1, \text{ on substitue } A_2.$$

$$A_1 \bar{t}_2^{-\beta} = (1 - A_1 - A_3 - \dots - A_n) \bar{t}_1^{-\beta}. \quad (45)$$

$$\bar{t}_2^{-\beta} = \left( \frac{1}{A_1} - 1 - \frac{A_3}{A_1} - \dots - \frac{A_n}{A_1} \right) \bar{t}_1^{-\beta}. \quad (46) \quad \text{Or comme } \frac{A_i}{A_j} = \left( \frac{\bar{t}_i}{\bar{t}_j} \right)^{-\beta}, \text{ on substitue les } \frac{A_i}{A_j}.$$

$$\bar{t}_2^{-\beta} = \left( \frac{1}{A_1} - 1 - \left( \frac{\bar{t}_3}{\bar{t}_1} \right)^{-\beta} - \dots - \left( \frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1} \right)^{-\beta} \right) \bar{t}_1^{-\beta}. \quad (47)$$

$$\bar{t}_2^{-\beta} = \frac{\bar{t}_1^{-\beta}}{A_1} - \bar{t}_1^{-\beta} - \bar{t}_3^{-\beta} - \dots - \bar{t}_n^{-\beta}. \quad (48)$$

$$\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta} = \frac{\bar{t}_1^{-\beta}}{A_1}. \quad (49)$$

$$\text{Et donc on obtient } A_1 = \frac{\bar{t}_1^{-\beta}}{\sum_{i \in R} \bar{t}_i^{-\beta}}.$$

**Modèle d'optimisation :**

Nous considérons un modèle d'optimisation qui correspond à l'hypothèse de comportement ( $v_l = A_l \cdot D_{OD}$ ), si l'ensemble  $R$  de toutes les routes de  $O$  vers  $D$  est énuméré.

$$\text{Min} \sum_{l \in R} \frac{v_l^2}{A_l} \quad (50)$$

$$\sum_{l \in R} v_l = D_{OD} \quad (\pi = \text{La variable duale de la contrainte}) \quad (51)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème sont :

$$\frac{\partial \sum_l \frac{v_l^2}{A_l}}{\partial v_l} = 2 \frac{v_l}{A_l} = \pi \quad \forall l \in R \quad (52)$$

$$\Rightarrow v_l = \frac{A_l \pi}{2} \quad \forall l \in R. \quad (53)$$

$$\text{De plus, } D_{OD} = \sum_l v_l = \frac{\pi}{2} \sum A_l = \frac{\pi}{2} \text{ car } \sum A_l = 1. \quad (54)$$

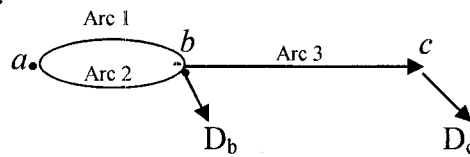
$$\text{Donc } v_l = A_l \cdot D_{OD}. \quad (55)$$

Nous avons donc un modèle avec un objectif non naturel mais qui permet d'obtenir les conditions d'optimalité  $v_l = A_l \cdot D_{OD}$ .

**Limite du modèle Logit sur les routes :**

Le modèle Logit sur les routes n'a pas la cohérence entre les flots d'une origine vers deux destinations même si  $\alpha = -1$ .

Exemple pour un  $\alpha = -1$ .



Le flot de  $a$  vers  $b$  est dans la proportion  $\frac{v_1^{ab}}{v_2^{ab}} = \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \frac{D_b}{D_b}$ .

Le flot de  $a$  vers  $c$  est dans la proportion  $\frac{v_1^{ac}}{v_2^{ac}} = \frac{\bar{t}_2 + \bar{t}_3}{\bar{t}_1 + \bar{t}_3} \frac{D_c}{D_c}$ .

Nous avons donc  $\frac{v_1^{ab}}{v_2^{ab}} \neq \frac{v_1^{ac}}{v_2^{ac}}$ , ce qui n'est pas le comportement souhaité. En effet, nous souhaitons que la répartition entre les routes parallèles reste égale, et ce quelque soit la destination au-delà du point de regroupement (ici,  $b$ ). Nous voulons donc un modèle pour lequel on a  $\frac{v_1^{ab}}{v_2^{ab}} = \frac{v_1^{ac}}{v_2^{ac}}$ .

Un autre désavantage de ce modèle par route est qu'il est de très grande taille. D'une part, il y a beaucoup de modèles à résoudre, autant que de paires O-D, et beaucoup de routes par paire O-D et donc par modèle, et il faut une variable par route.

### 2.1.3.2. Modèle Logit sur les sections de lignes

Par analogie avec le modèle sur les routes, nous considérons le modèle sur les sections de lignes de la façon suivante :

$$\text{Min} \sum_{l \in L} \frac{v_l^2}{A_l} \quad (56)$$

Sous contraintes

$$\sum_{l \in L_i^-} v_l - \sum_{l \in L_i^+} v_l = g_i \quad \forall i \in N \setminus \{o\} \quad (57)$$

où l'attraction pour une section de ligne  $l$  est définie par  $\bar{t}_l^\alpha$  avec  $\alpha < 0$ . Il est à noter que ce modèle, contrairement au modèle Logit sur les routes, considère le flot d'une origine vers toutes ses destinations, et donc  $v_l$  est le flot, sur une section de ligne, provenant de l'origine vers toutes ses destinations. Étudions les propriétés de ce modèle.

Nous considérons d'abord le cas où  $\alpha = -1$ . Les conditions d'optimalité du modèle Logit sur les sections de lignes sont :

$$\frac{\partial(v_l^2 \bar{t}_l)}{\partial v_l} = \pi_j - \pi_i \quad (58)$$

$$\Rightarrow 2v_l \bar{t}_l = \pi_j - \pi_i. \quad (59)$$

Nous allons déterminer la relation des coûts entre deux arcs parallèles et deux arcs en séries. Soit  $C$  un chemin de  $i$  vers  $j$  dans le réseau des sections de lignes défini par la suite d'arcs suivante :

$$C = ((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{K-1}, i_K)), \text{ avec } i_1 = i \text{ et } i_K = j. \quad (60)$$

Nous appliquons l'équation (59) sur l'ensemble des arcs composants le chemin  $C$ .

$$2 \sum_{k=1}^{K-1} v_{i_k, i_{k+1}} \bar{t}_{i_k, i_{k+1}} = \sum_{k=1}^{K-1} (\pi_{i_{k+1}} - \pi_{i_k}) = \pi_{i_K} - \pi_{i_1} = \pi_j - \pi_i. \quad (61)$$

Donc pour tout chemin  $C$  de  $i$  vers  $j$  :

$$2 \sum_{l \in C} v_l \bar{t}_l = \pi_j - \pi_i. \quad (62)$$

Si  $i$  est l'origine, on a pour tout chemin  $C$  de  $o$  vers  $j$  :

$$2 \sum_{l \in C} v_l \bar{t}_l = \pi_j. \quad (63)$$

Si on a  $l_1$  et  $l_2$ , deux arcs parallèles entre  $i$  et  $j$ , nous avons la relation suivante :

$$2v_{l_1} \bar{t}_{l_1} = \pi_j - \pi_i = 2v_{l_2} \bar{t}_{l_2}. \quad (64)$$

Si on veut remplacer les deux arcs parallèles  $l_1$  et  $l_2$  par un seul arc  $l$  équivalent entre  $i$  et  $j$ , on doit avoir :

$$v_l = v_{l_1} + v_{l_2}. \quad (65)$$

Alors, nous avons :

$$2v_l \bar{t}_l = \pi_j - \pi_i = 2v_{l_1} \bar{t}_{l_1} = 2v_{l_2} \bar{t}_{l_2}. \quad (66)$$

On croise les termes et nous obtenons :

$$\frac{1}{\bar{t}_{l_1}} = \frac{v_{l_2}}{v_l \bar{t}_l}, \text{ et } \frac{1}{\bar{t}_{l_2}} = \frac{v_{l_1}}{v_l \bar{t}_l}. \quad (67)$$

Nous additionnons les deux termes et nous obtenons :

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{t}_{l_1}} + \frac{1}{\bar{t}_{l_2}} = \frac{(v_{l_1} + v_{l_2})}{v_l} \times \frac{1}{\bar{t}_l} = \frac{1}{\bar{t}_l}. \quad (68)$$

Comme  $v_l = v_{l_1} + v_{l_2}$ , nous avons donc,

$$\frac{1}{\bar{t}_l} = \frac{1}{\bar{t}_{l_1}} + \frac{1}{\bar{t}_{l_2}}. \quad (69)$$

Si on a  $l_1$  et  $l_2$ , deux arcs en séries entre  $i$  et  $j$  (sans entrée ou sortie de flot au nœud intermédiaire), nous avons la relation suivante :

$$2v_{l_1} \bar{t}_{l_1} + 2v_{l_2} \bar{t}_{l_2} = \pi_j - \pi_i. \quad (70)$$

Si on veut remplacer les deux arcs en série  $l_1$  et  $l_2$  par un seul arc  $l$  équivalent entre  $i$  et  $j$ , on doit avoir :

$$v_l = v_{l_1} = v_{l_2}. \quad (71)$$

Alors, nous avons :

$$2v_l \bar{t}_l = \pi_j - \pi_i = 2v_{l_1} \bar{t}_{l_1} + 2v_{l_2} \bar{t}_{l_2}. \quad (72)$$

Nous mettons  $2v_l$  en facteur et nous obtenons :

$$2v_l \bar{t}_l = \pi_j - \pi_i = 2v_l (\bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2}). \quad (73)$$

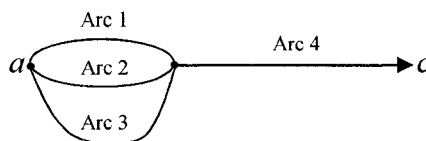
Nous annulons les  $2v_l$  et nous avons donc,

$$\bar{t}_l = \bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2}. \quad (74)$$

Une analogie entre le modèle de flot vu précédemment et un modèle de flot de courant électrique est présenté dans l'annexe C.

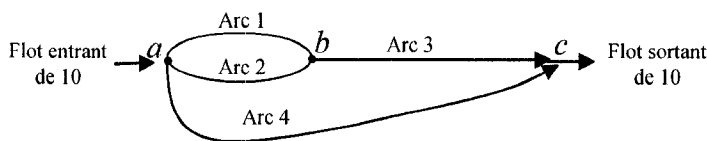
Les propriétés du modèle Logit pour un  $\alpha = -1$  sont les suivantes :

1. L'attraction d'un chemin est inversement proportionnelle à la somme des durées sur ces arcs.
2. Le flot entre les noeuds  $i$  et  $j$  reliés par un ensemble de chemins parallèles se répartit en proportion inverse de la durée de ces chemins.
3. L'attraction combinée d'un groupe de chemins parallèles est la somme de leurs attractions.
4. Pour les arcs parallèles en série avec un autre arc :



Contrairement à ce que l'on a observé avec le modèle Logit sur les routes. La répartition entre les arcs 1, 2, 3 pour le flot de  $a$  vers  $b$  est dans la même proportion que la répartition entre les 1, 2, 3 pour le flot de  $a$  vers  $c$ .

5. Pour les arcs parallèles-série en parallèle avec un autre arc :



Les coûts sur les arcs sont  $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \bar{t}_3 = 5$  et  $\bar{t}_4 = 10$ .

L'attraction de  $a$  vers  $b$  est :

$$A_{ab} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{A_{ab}} = \frac{5}{2}.$$

L'attraction de  $a$  vers  $c$  via  $b$  :

$$\frac{1}{A_{abc}} = \frac{1}{A_{ab}} + \frac{1}{A_{bc}} = \frac{5}{2} + 5 = 7,5 \Rightarrow A_{abc} = 0,133.$$

L'attraction de  $a$  vers  $c$  par l'arc direct 4 :

$$\frac{1}{A_{ac}} = 10 \Rightarrow A_{ac} = 0,1.$$

En utilisant les relations (40) et (41), le flot se répartit donc comme suit :

$$\text{chemin sur l'arc 4 : } 10 \cdot \frac{0,1}{0,233} = 4,3$$

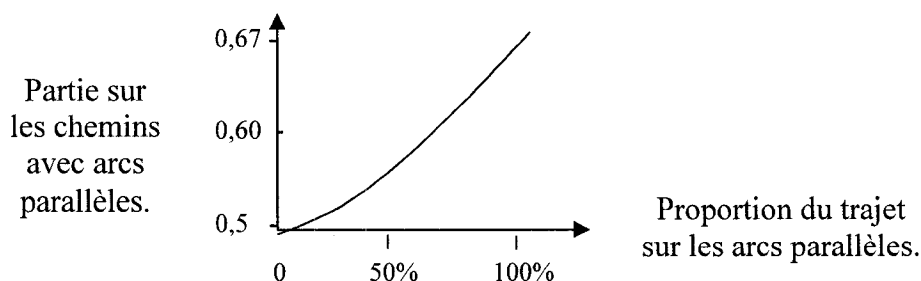
$$\text{chemins sur les arcs 1 et 3, et 2 et 3 : } 10 \cdot \frac{0,133}{0,233} = 5,7$$

Comme les arcs 1 et 2 en parallèles ont la même attraction, la répartition sur les deux chemins est donc :

$$\text{chemin sur les 1 et 3 : } 2,85$$

$$\text{chemin sur les arcs 2 et 3 : } 2,85$$

La répartition entre le chemin direct et les chemins avec les arcs parallèles varie selon la longueur des arcs parallèles. Les chemins avec arcs parallèles sont de la même durée que le chemin direct. La fonction de répartition a l'allure suivante.



Le modèle produit un comportement tel que des arcs parallèles longs sont perçus comme 2 routes et des arcs parallèles courts sont perçus comme une seule route. Il faudrait faire une recherche sur la perception des passagers pour voir si le modèle reproduit le bon comportement. Le comportement est peut être différent selon que les arcs parallèles sont au début ou à la fin du trajet.

6. La dernière propriété d'un modèle Logit avec un  $\alpha = -1$  est que la répartition entre les routes favorise trop les longues routes.

Par exemple, une route 4 fois plus longue attire 25% des passagers, ce qui est beaucoup trop.

Penchons nous sur le cas d'un modèle Logit avec un  $\alpha < 0$  quelconque. Ce cas est considéré en vue d'obtenir une répartition entre les routes qui favoriserait davantage les meilleures routes. Nous considérons un modèle avec pour objectif :

$$\text{Min} \sum_l \frac{v_l^2}{A_l} \quad \text{avec } A_l = \bar{t}_l^\alpha. \quad (75)$$

Soit deux arcs parallèles  $l_1$  et  $l_2$ . L'attraction de l'arc équivalent  $l$  est :

$$A_l = A_{l_1} + A_{l_2} = \bar{t}_{l_1}^\alpha + \bar{t}_{l_2}^\alpha.$$

Soit deux arcs en série  $l_1$  et  $l_2$ . L'attraction de l'arc équivalent  $l$  est :

$$\frac{1}{A_l} = \frac{1}{A_{l_1}} + \frac{1}{A_{l_2}} = \bar{t}_{l_1}^{-\alpha} + \bar{t}_{l_2}^{-\alpha} \neq (\bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2})^{-\alpha}.$$

Les propriétés 1 et 2 sont perdues mais les propriétés 3 et 4 sont conservées.

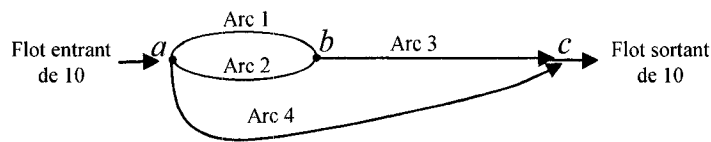
Regardons ce qui se passe pour la propriété 5.

Comme  $\bar{t}_{l_1}^{-\alpha} + \bar{t}_{l_2}^{-\alpha} < (\bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2})^{-\alpha}$  si  $\alpha < -1$  l'attraction des arcs en série est surestimée.

Exemple 1 :

$$\alpha = -2 \text{ et } \bar{t}_{l_1} = \bar{t}_{l_2} = 5$$

$$\bar{t}_{l_1}^2 + \bar{t}_{l_2}^2 < (\bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2})^2, \text{ en effet } 25 + 25 < 100.$$



Exemple 2 :

$$\text{Si } \bar{t}_{l_1} = \bar{t}_{l_2} = \bar{t}_{l_3} = 5 \text{ et } \bar{t}_{l_4} = 10$$

Il y a 3 routes de durée 10 aussi attrayantes l'une que l'autre avec le modèle sur les routes. Avec le modèle sur les arcs :

L'attraction de  $a$  vers  $b$  est :

$$A_{ab} = \frac{1}{\bar{t}_{l_1}^2} + \frac{1}{\bar{t}_{l_2}^2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{2}{25}$$



L'attraction de  $a$  vers  $c$  via  $b$  :

$$\frac{1}{A_{abc}} = \frac{1}{A_{ab}} + \frac{1}{A_{bc}} = \frac{25}{2} + 25 = 37,5 \Rightarrow A_{abc} = 0,266.$$

L'attraction de  $a$  vers  $c$  par l'arc direct 4 :

$$\frac{1}{A_{ac}} = 100 \Rightarrow A_{ac} = 0,01.$$

En calculant de la même façon qu'avec  $\alpha = -1$  Le flot se répartit de la façon suivante :

chemin sur les arcs 1 et 3 : 3,5

chemin sur les arcs 2 et 3 : 3,5

chemin sur l'arc 4 : 3,5

Nous avons donc surestimé le flot sur les routes ayant des arcs en série. C'est un biais inversé de celui étudié pour  $\alpha = -1$ .

Nous en concluons donc que la calibration de  $\alpha$  influence la répartition entre les arcs parallèles. Un  $\alpha$  très négatif aura tendance à favoriser fortement le plus court chemin.

Sur la figure 2.8 suivante nous avons représenté l'évolution du rapport des flots de 2 chemins parallèles  $v_1$  et  $v_2$  de temps de parcours  $\bar{t}_1$  et  $\bar{t}_2$  en fonction de  $\bar{t}_2 / \bar{t}_1$  et cela pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

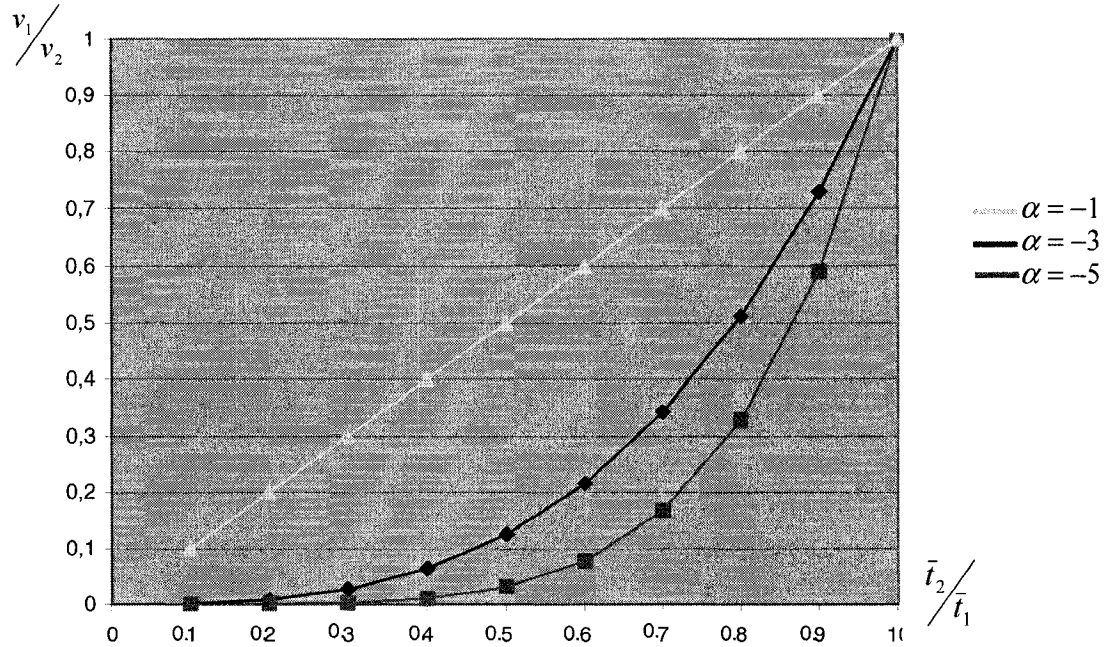


Figure 2.8 : Différentes fonctions de répartition

Il se pourrait que le  $\alpha$  ne soit pas le même pour les arcs courts et les arcs longs. Si  $\alpha = -5$ , un chemin 2 fois plus long transporte la fraction  $(1/2)^5 \approx 3\%$  du flot total. En pratique, on pourra mettre à zéro les flots sur les chemins trop longs.

### Résolution en considérant les lignes communes (pour $\alpha = -1$ )

Nous avons deux hypothèses de comportement :

- ✓ Le comportement local : Prendre le 1<sup>er</sup> autobus qui passe parmi les lignes communes choisies pour minimiser le temps perçu moyen.
- ✓ Le comportement global : Répartition des passagers entre les routes en fonction de l'inverse du temps perçu.

Considérons une section de route  $(i, j)$  formée par des lignes communes  $l \in S_{ij}$ . Nous allons écrire l'objectif (75) en terme de sections de routes pour les lignes communes.

Nous remplacerons  $\sum_{l \in S_{ij}} \frac{v_l^2}{A_l}$  par un seul terme associé à la section de route  $(i, j)$ .

Le problème du choix des lignes communes pour minimiser  $Z_{ij}$ , le total du temps d'attente et de déplacement de tous les passagers utilisant la section de route  $(i, j)$  s'écrit : (les  $\bar{t}_l$  incluent la pénalité appliquée pour la surcharge qui est supposée constante).

$$Z_{ij} = \underset{\{x_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in S_{ij}} \bar{t}_l v_l + \frac{\gamma \sum_{l \in S_{ij}} v_l}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l}. \quad (76)$$

Avec les contraintes  $v_l = \frac{x_l f_l V_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}$ ,  $\forall l$  où  $V_{ij}$  est le flot total. (77)

Nous substituons (77) dans (76) :

$$Z_{ij} = \underset{\{x_l\}}{\text{Min}} \sum_{l \in S_{ij}} \bar{t}_l \frac{x_l f_l V_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l} + \frac{\gamma \sum_{l \in S_{ij}} \frac{x_l f_l V_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l}. \quad (78)$$

Nous mettons les  $V_{ij}$  en facteur :

$$Z_{ij} = \underset{\{x_l\}}{\text{Min}} V_{ij} \left[ \sum_{l \in S_{ij}} \frac{\bar{t}_l x_l f_l}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l} + \frac{\gamma \sum_{l \in S_{ij}} \frac{x_l f_l}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l} \right]. \quad (79)$$

En simplifiant le deuxième terme et rassemblant les deux termes avec le même dénominateur, nous obtenons :

$$Z_{ij} = \underset{\{x_l\}}{\text{Min}} V_{ij} \sum_{l \in S_{ij}} \frac{\bar{t}_l x_l f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}. \quad (80)$$

Nous retrouvons ainsi une formule proche de l'objectif (15), un problème hyperbolique séparable, à savoir que l'on peut optimiser les  $x_l$  indépendamment des  $V_{ij}$ . Nous pouvons donc appliquer l'algorithme de résolution proposé à la section 1.2.4.1.

Après avoir résolu le problème hyperbolique, nous obtenons les  $x_l^*$  et nous calculons :

$$Z_{ij}^* = V_{ij} \sum_{l \in S_{ij}} \frac{\bar{t}_l x_l^* f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^* f_l}. \quad (81)$$

Pour le comportement global, nous pouvons donc considérer une section de route  $(i, j)$  qui remplace toutes les lignes communes  $l \in S_{ij}$  y compris l'attente, en prenant :

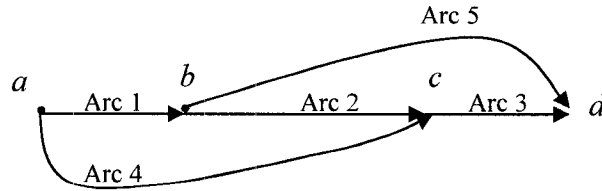
$$\bar{t}_{ij} = \sum_{l \in S_{ij}} \frac{\bar{t}_l x_l^* f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^* f_l} \quad (82)$$

Nous aurons dans l'objectif (75) le terme  $V_{ij}^2 \bar{t}_{ij}$  pour cette section de route  $(i, j)$ . Après

avoir résolu le problème de flot de la deuxième étape, nous avons  $v_l = \frac{x_l^* f_l V_{ij}}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l^* f_l}$ , la

répartition se fait en proportion des fréquences des lignes sélectionnées parmi les lignes communes. On sélectionne les lignes pour minimiser le temps moyen. On peut ainsi remplacer les lignes communes entre  $i$  et  $j$  par un seul arc équivalent.

Note : Les exemples que nous avons développés étaient tous des réseaux parallèle-série parce que plus simples et plus intuitifs. Il faut cependant réaliser que les réseaux que nous aurons à traiter ne seront pas en général de ce type. Un exemple simple d'un réseau qui n'est pas parallèle-série est le suivant.



Il faut donc que les modèles et les algorithmes que nous choisissons puissent traiter ces réseaux plus généraux et que les modèles aient les propriétés recherchées.

### 2.1.4. 2<sup>ème</sup> étape : synthèse et proposition de modèles

Dans un premier temps, faisons une synthèse des trois modèles vus jusqu'à présent pour la 2<sup>ème</sup> étape, puis nous en déduirons deux nouveaux. Pour cela, nous considérons un réseau composé d'arcs qui représenteraient des segments et des sections de routes tel que le réseau proposé à la figure 2.5.

#### 2.1.4.1. Synthèse des modèles

##### ✓ Modèle 1 :

Le modèle présenté dans la section 2.1.1.1. a pour objectif :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} v_a \bar{t}_a . \quad (83)$$

Ce modèle va concentrer les flots sur le chemin ayant le plus petit temps perçu  $\bar{t}_a$ . On note un peu de dispersion due à la surcharge. Si le chemin le plus court est surchargé, le surplus ira sur le deuxième chemin ayant le temps perçu minimum.

##### ✓ Modèle 2 :

Le modèle présenté dans la section 2.1.3.2. pour le cas  $\alpha = -1$  a pour objectif :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} v_a^2 \bar{t}_a . \quad (84)$$

Ce modèle va répartir les flots en proportion inverses des temps perçus  $\bar{t}_a$ . Dans ce cas, nous avons des flots sur tous les chemins.

##### ✓ Modèle 3 :

Le modèle présenté dans la section 2.1.3.2. pour le cas  $\alpha < 0$  a pour objectif :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} v_a^2 \bar{t}_a^{-\alpha} \quad \text{Avec } \alpha < 0 \quad (85)$$

Pour les cas  $\alpha \neq -1$ , le paramètre  $\alpha$  permet de choisir une plus ou moins grande concentration des passagers sur les chemins de plus petit temps perçu. Mais ce modèle a

des inconvénients par rapport au comportement des passagers car les temps perçus  $\bar{t}_a$  ne s'additionnent pas pour des arcs en série, à savoir  $\bar{t}_a^{-\alpha} + \bar{t}_b^{-\alpha} \neq (\bar{t}_a + \bar{t}_b)^{-\alpha}$ .

#### 2.1.4.2. Propositions de nouveaux modèles

L'idée est de mettre une puissance sur les variables  $v_a$ , afin de corriger le défaut de la puissance sur les variables  $\bar{t}_a$ . Nous proposons comme objectif :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} v_a^\beta \bar{t}_a^{-\alpha} \quad \text{Avec } \alpha < 0 \text{ et } \beta > 1. \quad (85)$$

En prenant les conditions de Kuhn-Tucker, on obtient

$$\beta v_a^{\beta-1} \bar{t}_a^{-\alpha} = \pi_j - \pi_i \text{ et donc } v_a = \left( \frac{\pi_j - \pi_i}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \frac{1}{\bar{t}_a^{\frac{\alpha}{\beta-1}}}. \quad (86)$$

Si  $\frac{\alpha}{\beta-1}$  est très grand, le flot se concentre sur les plus courts chemins.

Si  $\frac{\alpha}{\beta-1}$  est très petit (proche de 0), le flot se disperse sur plusieurs chemins.

Ainsi, nous pouvons obtenir la dispersion voulue en modifiant  $\alpha$  ou  $\beta$ . Il est bon de prendre  $\alpha = -1$ , de façon à conserver l'additivité des temps perçus sur un chemin et de modifier  $\beta$  pour ajuster la dispersion.

#### ✓ Modèle 4 :

À partir du modèle 3, nous proposons un autre modèle qui résout le problème de non-additivité des coûts pour les arcs en série. L'idée est de garder dans l'objectif les coûts  $\bar{t}_a$  à la puissance 1. L'objectif devient :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} v_a^\beta \bar{t}_a \quad \text{Avec } 1 < \beta < 2 \quad (87)$$

Avec un  $\beta$  proche de 1, nous avons une concentration de flots sur les arcs de coût

minimum. Et un  $\beta$  proche de 2, nous avons une répartition de flots inversement proportionnelle à  $\bar{t}_a$ .

Dans le cas où il n'y a qu'un groupe d'arcs parallèles, les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème sont :

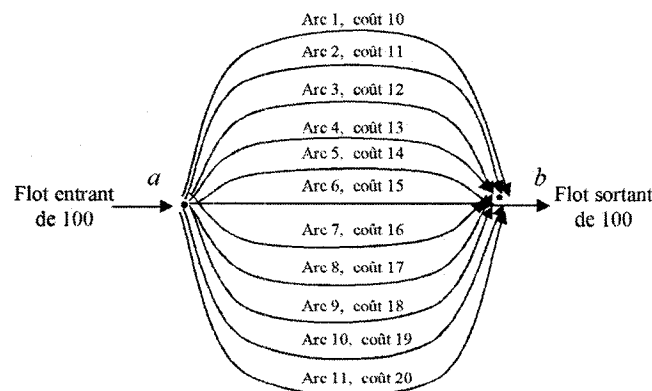
$$\frac{\partial \sum_{a \in \text{arcs}} v_a^\beta \bar{t}_a}{\partial v_a} = \beta v_a^{(\beta-1)} \bar{t}_a = \pi. \quad (88)$$

Avec  $\pi$ , la variable duale de la seule contrainte de flot.

$$\text{Donc, } v_a = \left( \frac{\pi}{\beta \bar{t}_a} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \quad (89)$$

Exemple :

Nous considérons 11 arcs parallèles ayant un coût respectif de 10, 11, 12,... jusqu'à 20.



Nous calculons les flots sur les arcs à l'aide de la relation (89) en prenant  $\beta = 1,20$  et un  $\pi = 24,68$  et nous obtenons :

$v_1 = 36,79$	$v_7 = 3,51$
$v_2 = 22,84$	$v_8 = 2,59$
$v_3 = 14,79$	$v_9 = 1,94$
$v_4 = 9,90$	$v_{10} = 1,48$
$v_5 = 6,84$	$v_{11} = 1,15$
$v_6 = 4,84$	

Nous avons donc un modèle qui répartit les flots sur plus de chemins.  $\beta$  est un paramètre unique pour tout le réseau et donc plus facile à calibrer. La fonction de répartition est donnée par la figure 2.9 pour un  $\beta = 1,20$ .

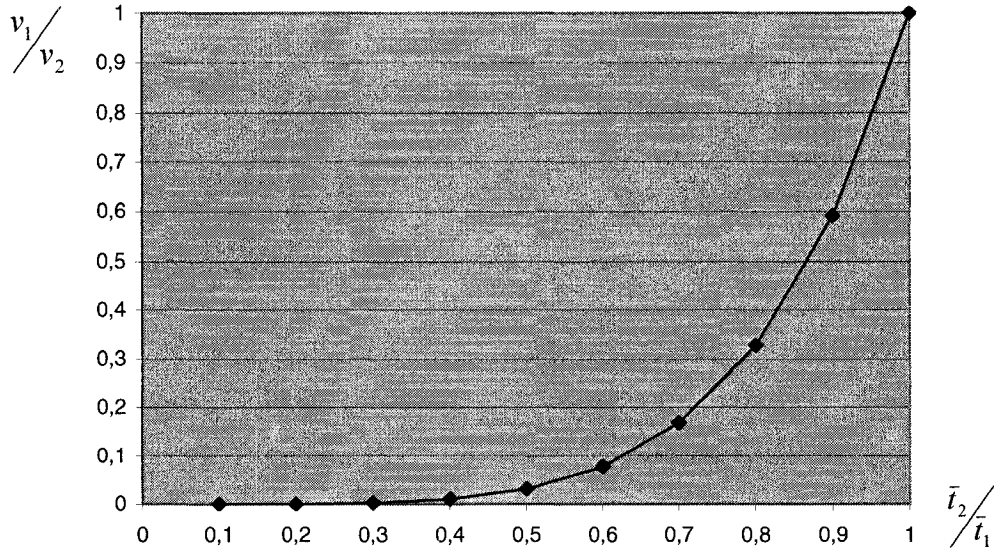


Figure 2.9 : Fonction de répartition du modèle 4

Revenons sur les modèles 1 et 2 qui utilisent  $\alpha = -1$ . Nous remarquons que leurs défauts se compensent. Le premier a tendance à concentrer le flot, tandis que le deuxième a tendance à le répartir inversement proportionnellement.

#### ✓ Modèle 5 :

Dans ce cas, utilisons ces modèles 1 et 2 dans un même modèle pour annuler le défaut de chacun. Nous définissons ainsi un nouveau modèle 5 ayant pour objectif :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} K v_a \bar{t}_a + v_a^2 \bar{t}_a. \quad (90)$$

Avec  $K$ , une constante qui va permettre de doser l'effet de concentration lié au premier terme.



Les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème, dans le cas où il n'y a qu'un groupe d'arcs parallèles, sont :

$$\frac{\partial \sum_{a \in \text{arcs}} (Kv_a \bar{t}_a + v_a^2 \bar{t}_a)}{\partial v_a} = K\bar{t}_a + 2v_a \bar{t}_a = \pi. \quad (91)$$

Avec  $\pi$ , la variable duale de la seule contrainte de flot.

$$K\bar{t}_a + 2v_a \bar{t}_a = \pi \quad \text{si } v_a > 0. \quad (92)$$

$$K\bar{t}_a \geq \pi \quad \text{si } v_a = 0. \quad (93)$$

Nous avons donc

$$v_a = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\bar{t}_a} - K \right), \quad \text{pour } \bar{t}_a < \frac{\pi}{K}. \quad (94)$$

$$v_a = 0, \quad \text{pour } \bar{t}_a \geq \frac{\pi}{K}. \quad (95)$$

Nous reprenons le même exemple présenté dans le modèle 4 avec les 11 arcs parallèles. Nous calculons les flots sur les arcs à l'aide des relations (94) et (95) en prenant  $K = 200$  et un  $\pi = 2857$ . Quels sont les arcs sur lesquels il n'y a pas de flot ?

Pour l'arc 5 de coût 14 :  $200.14 = 2800 < \pi$ , donc  $v_a > 0$ .

Pour l'arc 6 de coût 15 :  $200.15 = 3000 > \pi$ , donc  $v_a = 0$ .

Donc les arcs de 6 à 11 ont un flot nul. Pour les arcs de 1 à 5 nous obtenons :

$$v_1 = 42,80$$

$$v_2 = 29,9$$

$$v_3 = 19$$

$$v_4 = 9,90$$

$$v_5 = 2.$$

Nous obtenons un modèle tel que les flots se répartissent entre les bons chemins et sont nuls pour les chemins considérés comme mauvais. Ce modèle a l'avantage, lors de la réoptimisation, d'éliminer des graphes locaux les arcs ayant un mauvais coût. Le

paramètre  $K$  devrait dépendre de la capacité de l'arc. Il faudra trouver cette relation pour que la calibration porte sur un seul paramètre pour tout le réseau. La fonction de répartition est donnée par la figure 2.10 pour un  $K = 200$ .

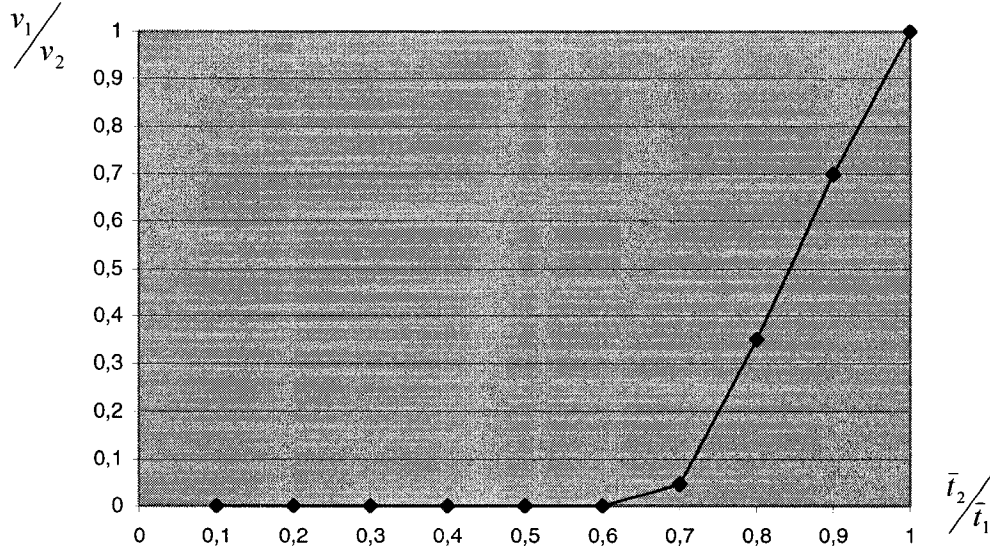


Figure 2.10 : Fonction de répartition du modèle 5

#### 2.1.4.3. Modèle retenu pour l'étude

À la vue des résultats donnés par les nouveaux modèles sur le comportement des voyageurs, nous avons choisi pour la suite de l'étude de retenir le modèle 5. Il s'agit d'un modèle hybride entre les modèles 1 et 2 et dont l'objectif est :

$$\text{Min} \sum_{a \in \text{arcs}} K v_a \bar{t}_a + v_a^2 \bar{t}_a. \quad (96)$$

Ce modèle a la particularité de confronter les deux effets contraires des modèles 1 et 2. Le premier concentre trop le flot sur le plus court chemin et le deuxième répartit le flot sur tous les chemins possibles pour se rendre à destination. Ainsi en les associant, nous parvenons à obtenir une répartition pluraliste des passagers sur les chemins pertinents. Le facteur  $K$  nous permettra d'agir sur cette répartition en contrôlant l'effet de concentration de flot généré par le premier terme.

## 2.2. Méthode de résolution

### 2.2.1. Algorithme de résolution

Dans cette section, nous allons expliquer plus en détail l'algorithme global d'optimisation d'affectation des passagers dans un réseau de transport en commun pour une itération  $k$ .

Pour cela, nous considérons un réseau composé d'arcs représentant des segments et des sections de routes pour les parties communes en plus de la représentation en segments (Cf. figure 2.5).

#### 2.2.1.1. Problème de flot

Le cœur de l'algorithme repose sur la 2<sup>ème</sup> étape qui affecte les passagers sur les arcs du réseau. Nous allons exprimer notre problème en utilisant le modèle 5 retenu pour notre étude dans la section 1.4.3. Pour une origine  $o$  donnée, l'objectif est :

$$\begin{aligned} \{V_{ij}, V_{s,o}^b, W_{s,o}^b\} \left\{ K \sum_{(i,j) \in W} V_{ij} \left( t_{ij} + \frac{\gamma}{f_{ij}} + p_{ij} \right) + \sum_{(i,j) \in W} V_{ij}^2 \left( t_{ij} + \frac{\gamma}{f_{ij}} + p_{ij} \right) \right\} + \\ \left\{ K \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} \left[ V_{s,o}^b t_s + W_{s,o}^b \frac{\gamma}{f_s^b} + F_s^b(V_s^b) \right] + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} \left[ (V_{s,o}^b)^2 t_s + (W_{s,o}^b)^2 \frac{\gamma}{f_s^b} + F_s^b(V_s^b) \right] \right\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \vphantom{\sum_{(i,j) \in W}} \right\} \text{Sections de} \\ \text{routes pour} \\ \text{les lignes} \\ \text{communes} \\ \\ \left. \vphantom{\sum_{b \in B}} \right\} \text{Segments} \\ \text{pour toutes} \\ \text{les lignes} \end{array} \quad (97)$$

$V_{s,o}^b$  : flot de passagers, venant de l'origine  $o$ , sur le segment  $s$  de la ligne  $b$ .

$W_{s,o}^b$  : flot de passagers, venant de l'origine  $o$ , montant au début du segment  $s$  de la ligne  $b$ .

$W_s^b$  : flot de passagers montant au début du segment  $s$  de la ligne  $b$ .

$f_s^b$  : fréquence de la ligne  $b$  sur le segment  $s$ .

$V_s^b$  : flot sur le segment  $s$  de la ligne  $b$  venant de l'origine  $o$  (flot considéré variable), auquel on ajoute, les flots sur le segment  $s$  de la ligne  $b$  venant des origines autres que  $o$  (flots considérés constants).

En ce qui concerne la calibration du paramètre  $K$ , nous remarquons que plus ce paramètre  $K$  est grand et plus fort est l'effet du premier terme ce qui concentre davantage le flot sur le plus court chemin. L'effet du terme quadratique par rapport à son terme linéaire dépend de la grandeur du flot sur l'arc. Pour ajuster cet effet sur chaque arc, il serait bon d'avoir un paramètre  $K$  propre à chaque arc dont la grandeur est reliée au flot et que l'on noterait  $K_{arc}$ . Pour avoir un seul paramètre pour le réseau, on peut prendre  $K_{arc} = K.C_{arc}$  où  $C_{arc}$  est une approximation du flot sur l'arc. Une approximation du flot disponible avant la résolution est la capacité nominale de l'arc (nombre de sièges pour la période).

### 2.2.1.2. Principe d'une itération $k$

#### 2.2.1.2.1. 1ère étape : Sélection des lignes communes

La sélection des lignes communes se fait par un problème hyperbolique avec  $p_l^k$ , la pénalité marginale par passager constante, pour chaque paire d'arrêts  $(i, j)$  entre lesquels il y a des lignes communes. Cette pénalité dépend du flot trouvé lors de l'itération précédente. Ce problème va sélectionner pour chaque paire d'arrêts les lignes qui minimisent l'espérance du temps de parcours parmi l'ensemble des lignes communes présentes entre ces deux arrêts. Le temps perçu par passager pour une ligne d'autobus  $l$  appartenant à une section de routes  $(i, j)$  lors de l'itération  $k$  est :

$$\bar{t}_l^k = t_l^k + p_l^k + \frac{\gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l^k}. \quad (98)$$

Ainsi, nous avons pour une section de route  $(i, j)$  donnée avec lignes communes :

$$\text{Min}_{\{x_l^k\}} \sum_{l \in S_{ij}} \frac{(t_l^k + p_l^k) x_l^k f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l^k} \quad (99)$$

Sous contraintes :

$$x_l^k = \{0,1\} \quad \forall l \in S_{ij} \quad (100)$$

Nous allons voir comment se déroule la résolution lors d'une itération  $k$ .

Pour la résolution du problème hyperbolique nous utilisons le même algorithme que de de Cea et Fernandez (1989) présenté dans la section 1.2.4.1. Ainsi pour une section de route  $(i, j)$  donnée, la résolution se fait de la façon suivante :

Soit  $R_{ij}^k = \sum_{l \in S_{ij}} \frac{(t_l^k + p_l^k)x_l^k f_l + \gamma}{\sum_{l \in S_{ij}} f_l x_l^k}$ , la valeur optimale du problème à l'itération  $k$ .

Et  $\bar{X}^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots)$ , ensemble des variables  $x_l^k$  associées aux lignes communes de la section de route  $(i, j)$  à l'itération  $k$ .

- ✓ On ordonne les temps déplacement perçu des sections de lignes à l'itération  $k$  tels que  $\bar{t}_1^k < \bar{t}_2^k < \dots < \bar{t}_n^k$  et on prend  $\bar{X}^k = (1, 0, 0, \dots)$ .
  - ✓ On calcule  $R_{ij}^k(\bar{X}^k)$ .
  - ✓ Puis on calcule  $R_{ij}^k(X^k)$ , avec  $X^k = (1, 1, 0, 0, \dots)$ .
  - ✓ Comparaison : Si  $R_{ij}^k(X^k) > R_{ij}^k(\bar{X}^k)$ , on arrête et la solution est  $\bar{X}^k$ .
- Sinon on pose  $\bar{X}^k = X^k$  et on calcule  $R_{ij}^k(X^k)$  avec  $X^k = (1, 1, 1, 0, \dots)$ .
- ✓ On continue de cette manière jusqu'à ce que  $R_{ij}^k(X^k) > R_{ij}^k(\bar{X}^k)$  ou bien une fois le vecteur  $X^k = (1, 1, 1, \dots, 1)$  atteint, auquel cas la solution est  $\bar{X}^k = X^k$ .

Après avoir sélectionné les lignes communes, nous les remplaçons par un seul arc équivalent représentant la section de route  $(i, j)$  avec un temps perçu  $\bar{t}_{ij}^k = R_{ij}^k(\bar{X}^k)^*$ .

#### 2.2.1.2.2. 2ème étape : Affectation des passagers sur les arcs

L'affectation des passagers sur les arcs se fait par un problème de flot non-linéaire pour chaque origine. Pour les lignes communes, nous avons  $p_{ij}^k$ , une pénalité marginale par passager constante sur la section de route  $(i, j)$  associée. Pour les lignes non-communes, la pénalité totale est non-constante, elle dépend des flots sur les segments de ces lignes

non-communes et est égale à  $\sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} F_s^b(V_s^{b,k})$ . Le temps perçu par passer pour une section de route  $(i, j)$  associée à des lignes communes est :

$$\bar{t}_{ij}^k = t_{ij}^k + \frac{\gamma}{f_{ij}^k} + p_{ij}^k = R_{ij}^k. \quad (101)$$

Le temps perçu par passer pour un segment  $s$  sur la ligne  $b$  en excluant la pénalité qui est calculé séparément est :

$$\bar{t}_s^b = t_s + \frac{\gamma}{f_s^b}. \quad (102)$$

Pour une origine  $o$  donnée à l'itération  $k$ , l'objectif est :

$$\begin{aligned} \underset{\{V_{ij}^k, V_{s,o}^{b,k}, W_{s,o}^{b,k}\}}{\text{Min}} & \left\{ K \sum_{(i,j) \in W} C_{ij} V_{ij}^k R_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in W} V_{ij}^{k^2} R_{ij}^k \right\} + \left\{ K \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} C_s \left[ V_{s,o}^{b,k} t_s + W_{s,o}^{b,k} \frac{\gamma}{f_s^b} + F_s^b(V_s^{b,k}) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{b \in B} \sum_{s \in S^b} \left[ (V_{s,o}^{b,k})^2 t_s + (W_{s,o}^{b,k})^2 \frac{\gamma}{f_s^b} + F_s^b(V_s^{b,k}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (103)$$

Dans l'objectif (103), nous avons des termes linéaires, quadratiques et linéaires par morceaux tel que  $F_s^b(V_s^{b,k})$ . Le solveur Cplex que nous avons choisi pour résoudre notre problème ne résout pas les problèmes linéaires par morceaux, nous allons voir plus loin dans la section 2.2, comment rendre ce terme de pénalité  $F_s^b(V_s^{b,k})$  linéaire et quadratique. Nous allons utiliser les modules de Cplex pour les réseaux et les problèmes quadratiques. Or ces modules ne s'appliquent pas aux problèmes multicommodité, nous procéderons donc à une boucle sur les origines. Nous rappelons que lors d'une boucle, la résolution porte sur le flot d'une origine vers toutes les destinations. Les flots des autres origines restent constants pendant l'itération. Nous allons voir comment utiliser Cplex pour les réseaux à coût non-linéaire. Dans notre cas, nous avons un réseau à coût quadratique, c'est-à-dire que notre problème est composé d'un objectif quadratique et de contraintes réseaux qui sont des contraintes de conservation de flot. Nous allons ainsi utiliser l'option 'q' de Cplex (destinée à optimiser les problèmes à objectif quadratique)

pour résoudre le problème d'affectation comme un problème quadratique avec contraintes linéaires. Cplex permet d'utiliser le « Network Optimizer » (Algorithme réseau) pour résoudre les problèmes quadratiques. Dans un premier temps, Cplex ignore les termes quadratique de l'objectif et cherche dans le programme linéaire résultant, la partie qui correspond à une structure réseau et résout ce problème réseau l'aide de l'algorithme réseau. Il utilise ensuite la base obtenue comme départ à un algorithme du simplexe pour les contraintes linéaires pour résoudre le problème quadratique. Cependant, le problème pourrait être résolu plus rapidement avec un algorithme de résolution traitant un objectif quadratique et des contraintes de réseau.

Pour le calcul de la pénalité marginale par passager pour la prochaine itération, nous rappelons que la pénalité sur les lignes communes est considérée constante. Ainsi après avoir bouclé sur les origines lors de l'étape 2, nous avons en résultat de cette dernière les valeurs des variables  $V_{ij}^k, V_s^{b,k}$  et  $W_s^{b,k}$ . Puis, nous répartissons les flots de lignes communes sur leurs segments associés afin d'obtenir le flot total sur ces segments qui va nous servir aux calculs de la pénalité.

$$\text{Pour } x_l = 1, \quad V_{s,o}^k = \frac{f_l V_{ij}^k}{f_{ij}} \quad \forall l \in S_{ij}, (i, j) \in W, s \subseteq l \quad (104)$$

$$\text{Sinon,} \quad V_{s,o}^k = 0 \quad (105)$$

Nous calculons ensuite la pénalité marginale par passager sur une ligne d'autobus faisant partie de la portion commune pour la prochaine itération  $k+1$  :

$$p_l^{k+1} = \left( \sum_{s \in S_{ij}^b, s \subseteq l} F_s^{b,k} (V_s^{b,k}) \right), \quad \forall (i, j) \text{ et } \forall l \in S_{ij}, \text{ lignes communes de la section de route } (i, j) \text{ (Cf. section 2.1.1.3.).}$$

Puis, nous nous retournons à l'étape 1. La boucle entre les étapes 1 et 2 se fera jusqu'à convergence des flots  $V_{ij}^k, V_s^{b,k}$  et  $W_s^{b,k}$ .

### 2.2.2. Réseau rendant les coûts de surcharge linéaire

Dans cette section, nous allons voir comment représenter dans le réseau la pénalité de surcharge sur les segments, sachant que cette pénalité n'est pas constante contrairement aux sections de routes où elle reste constante pendant l'itération. Comme notre modèle hybride utilise les modèles 1 et 2 (Cf. section 2.1.4.1.), nous allons d'abord représenter le coût de surcharge linéaire pour chacun de ces deux modèles puis l'appliquer à notre modèle par combinaison linéaire. Pour chaque segment, il y a un seuil  $B$  (nombre de passagers) au-delà duquel une pénalité  $p$  est appliquée pour chaque passager supplémentaire sur le segment.

#### *La fonction de coût sur un segment du modèle 1 :*

Pour le modèle 1 sans pénalité, le coût sur le segment  $s$  est  $c_s x_s$ . En tenant compte de la pénalité, nous avons pour le segment  $s$  le coût suivant :

$$c_s x_s, \text{ si } x_s \leq B \quad (106)$$

$$c_s B + (c_s + p)(x_s - B), \text{ si } x_s > B \quad (107)$$

#### *La fonction de coût sur un segment du modèle 2 :*

Pour le modèle 2 sans pénalité, le coût sur le segment  $s$  est  $c_s x_s^2$ . Les conditions d'optimalité en utilisant la dérivée du coût sont  $x_s = \frac{\pi}{2c_s}$ , pour tout segment  $s$ . En tenant compte de la pénalité, nous avons pour tout segment  $s$ , les conditions d'optimalité suivantes :

$$\text{Soit } x_s = \frac{\pi}{2c_s} \text{ pour } x_s \leq B \quad (108)$$

$$\text{Et } x_s = \frac{\pi}{2(c_s + p)} \text{ pour } x_s > B \quad (109)$$

La dérivée du coût pour un flot au-delà du seuil  $B$  est :  $2(c_s + p)x_s = \pi$ .

Pour obtenir la fonction de coût du segment correspond à ces conditions d'optimalité



pour un flot au-delà du seuil  $B$ , nous intégrons la dérivée entre 0 et  $x_s$ , et nous obtenons :

$$[c_s x_s^2]_0^B + [(c_s + p)x_s^2]_B^{x_s}. \quad (110)$$

Pour un flot au-delà du seuil  $B$  sur le segment  $s$ , nous avons le coût suivant :

$$c_s B^2 + (c_s + p)x_s^2 - (c_s + p)B^2, \text{ si } x_s > B. \quad (111)$$

Exprimons l'expression (111) ci-dessus en fonction de  $(x_s - B)$ . Nous substituons  $x_s^2$  par  $(x_s - B)^2 + (2Bx_s - B^2)$  dans (111) et nous obtenons :

$$c_s B^2 + (c_s + p)(x_s - B)^2 + (c_s + p)(2Bx_s - B^2) - (c_s + p)B^2. \quad (112)$$

Nous regroupons les deux derniers termes en mettant en facteur  $(c_s + p)2B$  :

$$c_s B^2 + (c_s + p)(x_s - B)^2 + (c_s + p)2B(x_s - B). \quad (113)$$

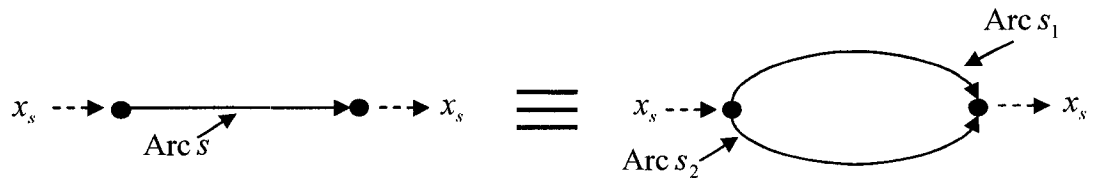
Ainsi pour le modèle 2, en tenant compte de la pénalité nous avons pour le segment  $s$  le coût suivant :

$$c_s x_s^2, \text{ si } x_s \leq B. \quad (114)$$

$$c_s B^2 + (c_s + p)(x_s - B)^2 + (c_s + p)2B(x_s - B), \text{ si } x_s > B. \quad (115)$$

### ***Prise en compte de la pénalité dans le réseau :***

Comme le coût unitaire sur un segment n'est pas le même pour les flots inférieurs au seuil par rapport aux flots excédents, nous allons représenter chaque segment par deux arcs tels qu'illustrés sur la figure 2.11. Un arc  $s_1$  sans pénalité, limité par une borne supérieure égale au seuil  $B$ . Et, un arc  $s_2$  avec pénalité, sans borne supérieure. Le flot  $x_s$  par segment est ainsi formé de  $x_{s_1}$  et  $x_{s_2}$ , les flots respectifs sur chaque arc  $s_1$  et  $s_2$  composant le segment  $s$ . Nous avons donc  $x_s = x_{s_1} + x_{s_2}$  avec  $x_{s_1} \leq B$ .



**Figure 2.11 : Représentation de la pénalité sur les arcs**

Ainsi pour résumer, nous avons répertorié les coûts sur les arcs dans le tableau 2.1.

**Tableau 2.1 : Coûts sur les arcs des modèles 1 et 2**

	<i>Modèle 1</i>	<i>Modèle 2</i>
Arc $s_1$	$c_s x_{s_1}$	$c_s x_{s_1}^2$
Arc $s_2$	$(c_s + p)x_{s_2}$	$(c_s + p)x_{s_2}^2 + (c_s + p)2Bx_{s_2}$

***La fonction de coût sur un segment du modèle 5 :***

Le modèle hybride 5 est en fait une combinaison linéaire des modèles 1 et 2. Pour le modèle 5, le coût sur le segment  $s$  est  $Kc_s x_s + c_s x_s^2$ . En tenant compte de la pénalité, les coûts sur les arcs  $s_1$  et  $s_2$  sont :

$$\text{Arc } s_1 : Kc_s x_{s_1} + c_s x_{s_1}^2 \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \text{Arc } s_2 : & K(c_s + p)x_{s_2} + (c_s + p)x_{s_2}^2 + (c_s + p)2Bx_{s_2} \\ & = (c_s + p)(K + 2B)x_{s_2} + (c_s + p)x_{s_2}^2. \end{aligned} \quad (117)$$

Pour le modèle hybride 5, les couts sur les arcs sont répertorié dans le tableau 2.2.

**Tableau 2.2 : Coûts sur les arcs du modèle hybride**

	<i>Modèle hybride</i>
Arc $s_1$	$Kc_s x_{s_1} + c_s x_{s_1}^2$
Arc $s_2$	$(c_s + p)(K + 2B)x_{s_2} + (c_s + p)x_{s_2}^2$

Ainsi, les coûts deviennent séparables par arcs pour notre modèle d'étude, la pénalité de surcharge est donc intégrée dans le coût de l'arc.

Nous avons codé l'algorithme en langage C en utilisons la bibliothèque du solveur Cplex. La structure de donnée adoptée pour la résolution ainsi que la logique du code sont expliqués en détails dans l'annexe D.

## **CHAPITRE 3 : RÉSULTATS OBTENUS**

À la suite de la définition de notre modèle 5 (Cf. section 2.1.4.3.), nous avons décidé de le coder en langage C en utilisant la bibliothèque Cplex. Dans ce chapitre 3, nous allons exposer les résultats obtenus par notre modèle, dans un premier temps avec une demande générée aléatoirement puis avec une demande réelle.

### **3.1. Données en entrée**

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, nous avons deux types d'arrêts, les arrêts à bord et les arrêts extérieurs. Les flots entrent et sortent du réseau via les arrêts extérieurs. Pour notre recherche, nous utilisons une partie du réseau de la ville de Montréal. Dans le réseau, sont représentés les quatre lignes de métro et les lignes d'autobus se trouvant à l'intérieur du « U » délimité par la ligne orange de Côte-Vertu à Henri Bourassa (Cf. figure 3.1). Dans ce réseau, il y a 2407 arrêts à bord et 932 arrêts extérieurs.

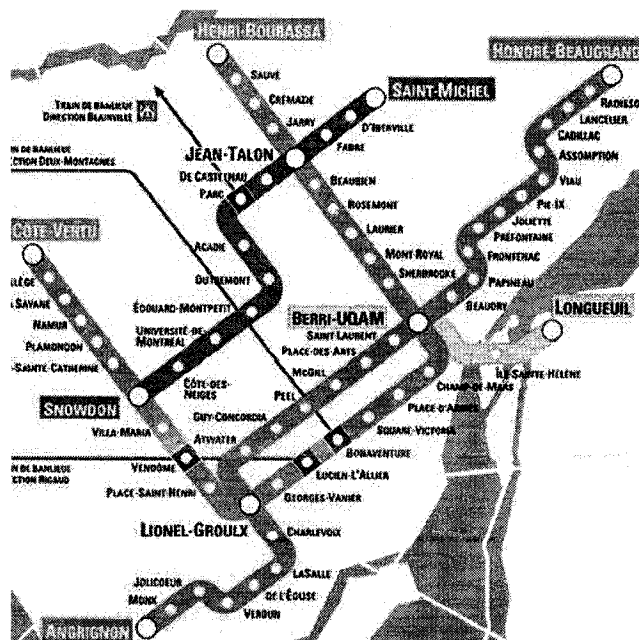


Figure 3.1 : Plan du réseau de métro

Source: [www.stm.info](http://www.stm.info)

La demande est représentée par une matrice origine-destination 932x932 sur les nœuds correspondants aux arrêts extérieurs.

### 3.2. Demande générée

Pour la demande générée aléatoirement, nous avons rempli la matrice en prenant une origine sur 20 et pour chacune de ces origines une destination sur 20, ce qui fait 47 origines pour lesquels nous avons 47 destinations chacune, soit 2209 origines-destinations. Pour chaque origine-destination, nous avons affecté une demande aléatoire entre 0 et 10, ce qui fait en moyenne 11045 personnes dans le réseau. Pour visionner les résultats, nous avons fait un zoom sur un triplet (origine, destination, demande) donné parmi la demande du réseau complet.

#### 3.2.1. Résultats sans les lignes communes

Parmi la demande générée, nous allons étudier plus en détail la demande illustrée par la figure 3.2 où 120 personnes se déplacent de Mont Royal / du Parc à Graham / Rockland.

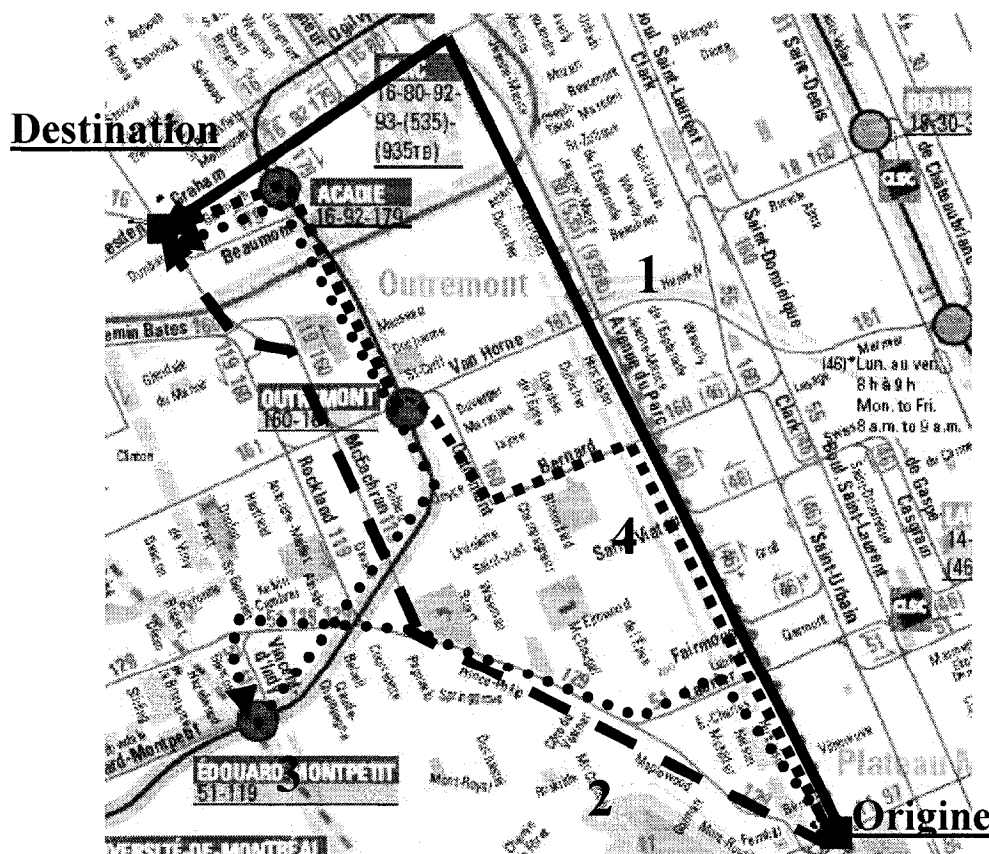


Figure 3.2 : Chemins de Mont-Royal / du Parc à Graham / Rockland

Pour se rendre au coin Graham / Rockland à partir du coin Mont-Royal / du Parc, il y a plusieurs chemins possibles, dont quatre plus attrayants en gras sur la figure 3.2. Les lignes d'autobus de ces quatre chemins sont :

Chemin 1 : 80 / 535 + 16 / 5 + 179

Chemin 2 : 129 + 119

Chemin 3 : 80 / 535 + 51 + 5 + 179

Chemin 4 : 80 / 535 + 160 + 5 + 179

Dans le tableau 3.1, nous avons la capacité des lignes d'autobus exprimée en nombre de sièges disponibles.

**Tableau 3.1 : Capacité des lignes d'autobus**

Ligne	5	51	80	119	129	160	179	535
Nombre de sièges	2700	180	270	60	90	120	180	180

Nous avons effectué 4 tests avec des valeurs du paramètre  $K$  différentes les résultats sont répertoriés dans le tableau 3.2. Nous rappelons qu'augmenter la valeur du paramètre a pour effet de concentrer les flots sur le plus court chemin. La durée des chemins incluse le temps d'attente. Les flots trouvés sont :

**Tableau 3.2 : Flots obtenus pour différentes valeur de  $K$**

Chemin	1	2	3	4
Durée	23,15	33,6	28,54	31,21
K = 150	63	44	10	3
K = 200	65	35	15	5
K = 300	80	30	10	0
K = 500	72	20	28	0

Bien qu'il y ait qu'un seul changement de ligne pour le chemin 2 et qu'il semble direct, il est plus long à cause d'une faible fréquence et donc d'un temps d'attente plus long. Bien que le chemin 3 soit moins long que le chemin 2, il attire moins de flots à cause de la congestion. Nous remarquons, que pour une valeur de  $K$  croissante de 150 à 300, les flots du plus court chemin 1 augmentent. Par contre, pour un  $K$  égal à 500, les flots sur le chemin 1 diminuent et ils augmentent sur le chemin 3 (Cf. Tableau 3.2).

Cependant, les chemins 1, 3 et 4 utilisent les mêmes arcs de déplacement au début du parcours, c'est-à-dire l'avenue du Parc. Regroupons ces 3 chemins en un seul (Av. du Parc) avec la durée moyenne sur ces 3 chemins et comparons-le avec le chemin 2 (Côte-Ste-Catherine), car, en effet, à l'arrêt origine le voyageur a le choix entre passer par l'avenue du Parc ou par le chemin de la Côte-Ste-Catherine.

Ainsi, les flots à l'arrêt origine sur ces deux artères sont dans le tableau 3.3:

**Tableau 3.3 : Flots regroupés au départ**

<b>Chemin</b>	<b>Av. du Parc</b>	<b>Côte-Ste-Catherine</b>
<b>Durée</b>	27,63	33,6
<b>K = 150</b>	76	44
<b>K = 200</b>	85	35
<b>K = 300</b>	90	30
<b>K = 500</b>	100	20

Dans ce tableau, les deux chemins n'utilisent pas les mêmes arcs et nous notons bien l'effet de concentration produit par le paramètre  $K$  qui concentre les flots sur l'avenue du Parc au fur à mesure qu'il augmente.

Dans le tableau 3.2, la diminution du flot sur le chemin 1 et l'augmentation pour le chemin 3 s'explique par la congestion de l'avenue du Parc. En effet, pour  $K$  égal à 500, le flot total sur l'avenue du Parc est de 480 et la surcharge est atteinte à partir de 450. Ainsi les flots en surcharge utilisent un autre chemin tel que le chemin 3 dès que cela est possible, c'est pourquoi le flot augmente pour le chemin 3. La répartition pluraliste des flots s'applique essentiellement sur des chemins différents n'utilisant pas les mêmes arcs de déplacement. Dans ce test, il y a quatre chemins intéressants, mais en pratique les voyageurs se répartissent essentiellement entre deux chemins principaux et il peut y avoir un troisième chemin alternatif avec moins de flots que sur les deux premiers. Dans le tableau 3.2, les flots trouvés pour une valeur de  $K$  égale à 300 semblent réalistes et simule assez fidèlement le comportement des passagers. Pour la suite de notre étude, nous fixons le paramètre  $K$  à 300.

### 3.2.2. Résultats avec les lignes communes

Dans ce paragraphe, nous reprenons le même exemple que précédemment à savoir 120 personnes qui se déplacent de Mont-Royal / du Parc à Graham / Rockland parmi la demande du réseau complet, mais en considérant cette fois-ci les lignes communes. Dans ce cas, il y a sur toute l'avenue du Parc, entre les rues Mont-Royal et Jean Talon, des sections de routes (lignes communes) avec les lignes 80 et 535 et les deux ont été sélectionnées par les problèmes hyperboliques. Ainsi, il y a des arcs de déplacement plus rapides sur l'avenue du Parc dû au fait que les temps d'attente sont plus petits car le passager monte dans le premier autobus qui passe (80 ou 535). Il en est de même avec les lignes 16 et 92 sur la rue Jean Talon entre l'avenue du Parc et la rue Rockland. Tout le flot, c'est-à-dire les 120 voyageurs, emprunte le chemin 1. En effet, comme le chemin 1 possède toutes les lignes communes que l'on vient d'énumérer, il attire d'autant plus de personnes car son coût à diminuer grâce à des temps d'attente des lignes communes faibles. Les flots sur ces arcs communs sont :

- ✓ 20 personnes de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / du Parc.
- ✓ 60 personnes de Jean Talon / du Parc à Graham / Rockland.

Les autres personnes ont utilisé le réseau local de segments du chemin 1.

Dans le cas où l'on ne tenait pas compte des lignes communes (Cf. la section 2.1. pour  $K = 300$ ), il y avait 30 voyageurs qui empruntaient le chemin 2. Avec les lignes communes, ces voyageurs sont amenés à utiliser le chemin 1 qui devient beaucoup plus intéressant avec un temps total plus faible. Dans cet exemple, nous avons tous les flots concentrés sur le même chemin 1 avec l'arrivée des lignes communes notamment sur l'avenue du Parc. Cependant, même pour une valeur de  $K = 300$  et la présence des lignes communes, la demande ne se concentre pas sur un seul chemin automatiquement.

Voici un exemple illustré par la figure 3.3 où le flot se répartit sur 5 chemins avec la présence des lignes communes. Dans cet exemple, 120 personnes se déplacent de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / Côte-des-Neiges.

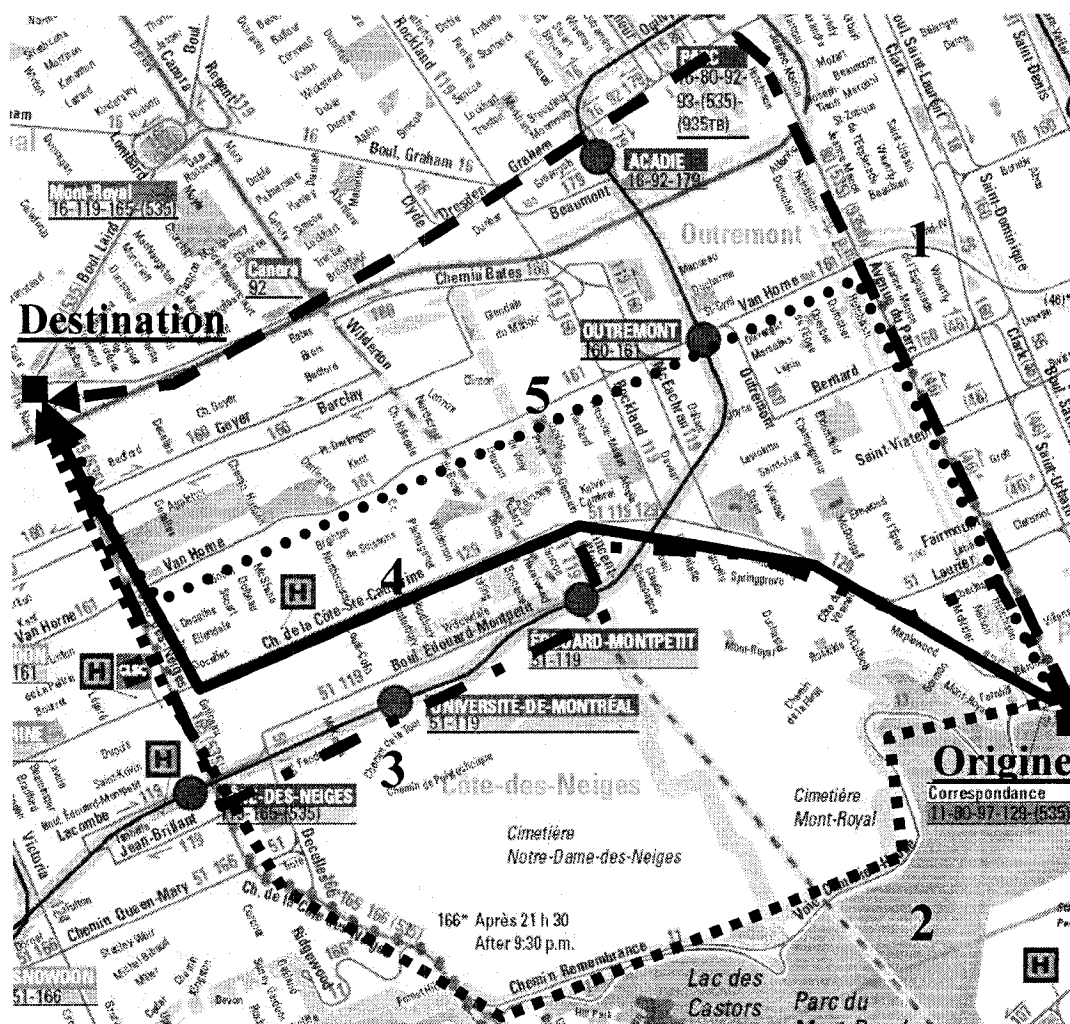


Figure 3.3 : Chemins de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / Côte-des-Neiges

Les flots trouvés sont :

Tableau 3.4 : Flots obtenus de Mont-Royal / du Parc à Jean Talon / Côte-des-Neiges

Chemin	1	2	3	4	5
Durée	37,67	36,08	30,55	31,39	33,19
K = 300	18	26	43	19	14

Ainsi, même avec des lignes communes et une valeur de  $K$  égal à 300, nous avons pour cette demande des flots non négligeables répartis sur 5 chemins. Nous en déduisons donc que la valeur 300 de  $K$  pour le réseau global n'est ni trop forte ni trop faible.



Dans la résolution, il y a une boucle entre les étapes 1, sélection des lignes communes et l'étape 2, affectation des flots sur les arcs du réseau (Cf. section 2.2.). Cette boucle s'effectue jusqu'à convergence des flots sur les arcs du réseau. À chaque itération de la boucle, l'écart maximum relevé (delta) sur un arc pour une origine est mesuré. La boucle s'arrête lorsque que la valeur de delta est inférieure ou égale à 2, c'est-à-dire que pour chaque origine, il y a au plus deux voyageurs qui ont changé de chemin et donc les flots pour chaque origine sont considérés stables. Sur la figure 3.4, les valeurs de delta pour les 50 premières itérations sont illustrées.

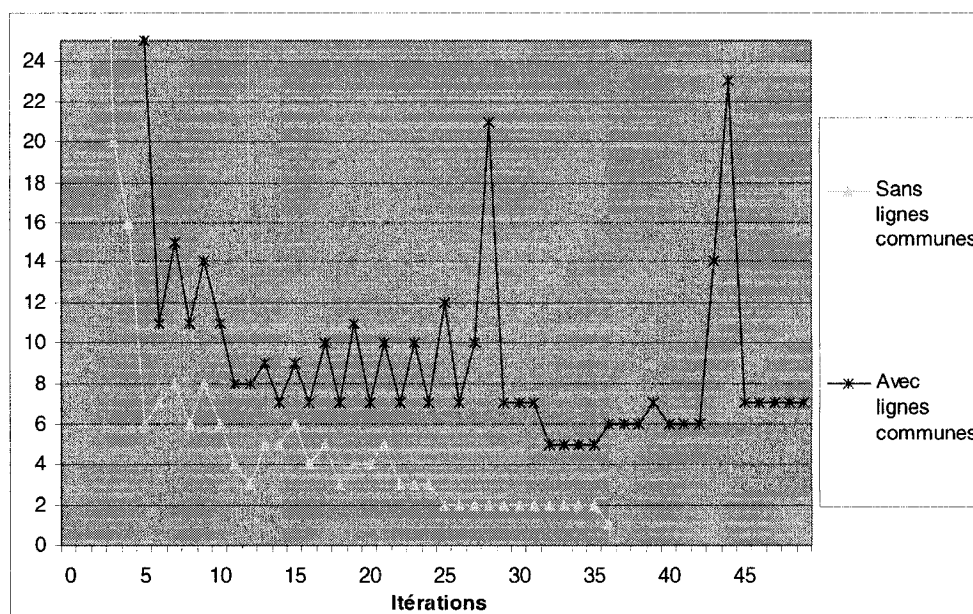


Figure 3.4 : Valeurs de delta avec et sans les lignes communes

Nous remarquons sur cette figure qu'avec les lignes communes, la valeur de delta s'amortit plus lentement que sans les lignes communes. Avec les lignes communes, la stabilité des flots s'obtient en plus d'itérations que sans lignes communes. Cette lenteur de convergence s'explique par le fait que les coûts sur les arcs communs dépendent des flots car la pénalité de surcharge est calculée en fonction des flots trouvés à l'itération précédente.

Notre fonction de pénalité est une fonction linéaire par morceaux (Cf. figure 3.5).

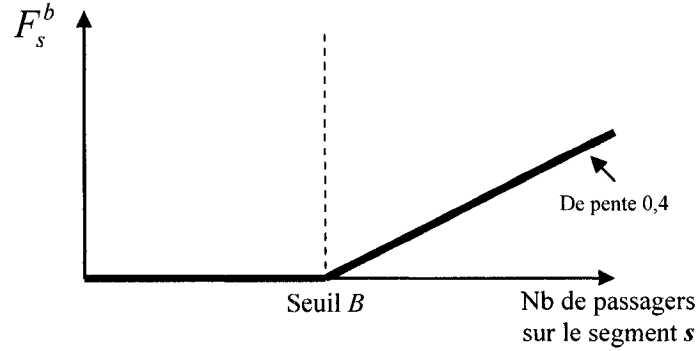


Figure 3.5 : Fonction de pénalité

Nous rappelons que la pénalité marginale par passager est  $p_l^{k+1} = \left( \sum_{s \in S^b, s \subseteq l} F_s'^b(V_s^{b,k}) \right)$ .

Considérons un arc commun qui a une surcharge à l'itération  $k$ , soit un flot important à l'itération  $k$  au delà du seuil  $B$ . Ainsi, son coût à l'itération  $k+1$  sera plus élevé dû à la pénalité de surcharge (positive) et donc le flot à l'itération  $k+1$  sera plus faible, inférieur au seuil  $B$  ce qui résultera en une pénalité de surcharge nulle à l'itération  $k+2$ . Le flot sur cet arc subit donc une oscillation due à l'oscillation du coût. Tant que le flot oscille autour du seuil  $B$ , la pénalité de la surcharge oscille et génère l'oscillation du flot. Il y a donc une instabilité dans le calcul de la pénalité de surcharge sur les lignes communes.

Pour résoudre ce problème d'oscillation, nous savons que le calcul de la pénalité de surcharge sur une ligne commune tient compte des flots totaux trouvés sur les segments qui la composent. L'idée est d'amortir l'oscillation en appliquant un facteur d'amortissement  $0 \leq \rho \leq 1$  sur les flots totaux trouvés sur les segments. Ces flots amortis ne serviront que pour le calcul des pénalités de surcharge sur les lignes, c'est-à-dire qu'ils ne seront pas utilisés pour le calcul de la solution courante et de la solution finale dans le réseau. Pour chaque segment, nous avons :

- ✓  $X_k$ , flot total trouvé à l'itération  $k$  et présent dans le réseau.
- ✓  $X_k^\theta$ , flot total amorti à l'itération  $k$  non présent dans le réseau.

Le flot amorti se calcule de la façon suivante :  $X_{k+1}^\theta = \rho X_{k+1} + (1 - \rho) X_k^\theta$ .

Ainsi, le flot amorti convergera plus vite vers le flot final et il oscillera moins d'un côté ou de l'autre du seuil  $B$ , ce qui rendra constante la pénalité de surcharge. En effet, si le flot oscille au delà du seuil  $B$ , la pénalité restera la même, le coût de l'arc aussi et donc cela accélérera la convergence des flots. Dans la figure 3.6, nous allons voir les différentes convergences de delta obtenues avec différentes valeurs du facteur d'amortissement  $\rho$ .

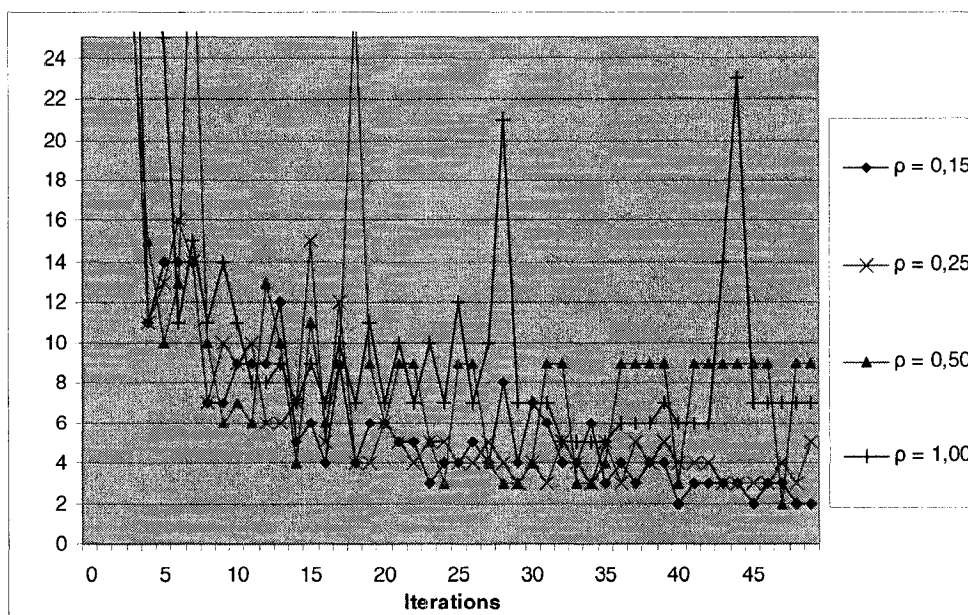


Figure 3.6 : Valeurs de delta avec amortissement

Pour un  $\rho = 1$ , c'est-à-dire sans amortissement, nous observons des oscillations et le delta diminue lentement, après 40 itérations le delta est encore supérieur à 20. Un  $\rho = 0,50$  génère une valeur de delta de 9 après 40 itérations. Avec des valeurs de  $\rho$  plus petites de l'ordre de 0,15 et 0,25, les oscillations ont de faibles amplitudes et les valeurs de delta diminuent plus rapidement; après 40 itérations leur valeur respective est de l'ordre de 3 et 5. Cependant, avec un facteur d'amortissement trop faible, le flot amorti d'un arc commun mettra plus d'itérations avant d'atteindre le flot seuil autour duquel il va osciller. Ainsi un  $\rho$  grand permet d'atteindre le flot seuil rapidement, mais il en résulte une oscillation de forte amplitude. Un  $\rho$  petit génère une oscillation de faible amplitude, mais atteint le flot seuil moins rapidement. L'idée est donc d'avoir un

$\rho$  grand pour les premières itérations afin d'arriver plus vite dans la région du flot seuil, puis d'avoir un  $\rho$  petit pour osciller faiblement et donc converger plus rapidement.

Dans ce cas, posons  $\rho = \frac{1}{k}$  avec  $k$  le numéro de l'itération. D'après la figure 3.6, le delta commence à osciller à partir de la cinquième itération. Nous essayerons aussi ce que nous appelons «  $\rho = \frac{1}{k}$  modifié » qui est :  $\rho = 1$  pour  $k < 5$ , et  $\rho = \frac{1}{k-4}$ , sinon

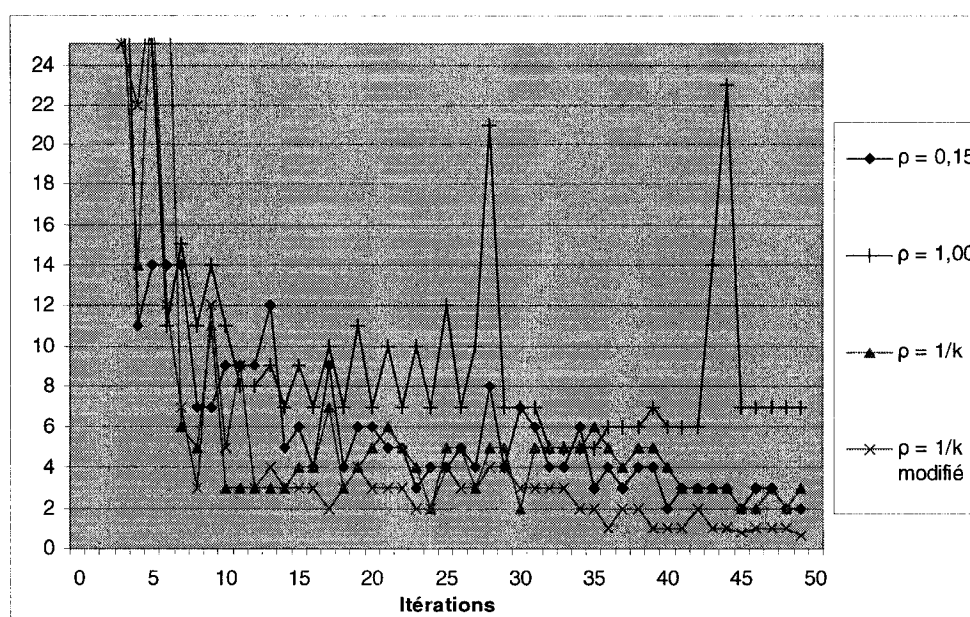


Figure 3.7 : Valeurs de delta avec amortissement amélioré

Nous remarquons dans la figure 3.7 qu'avec un «  $\rho = \frac{1}{k}$  modifié », le delta oscille moins et, après 40 itérations, il est de l'ordre de 1. À partir d'une trentaine d'itérations, le delta est de l'ordre de 2, c'est-à-dire que, pour chaque origine, seulement 2 personnes au maximum changent d'itinéraire. Nous obtenons ainsi une convergence du delta similaire à celle obtenue sans les lignes communes illustrée par la figure 3.4. S'il l'on considère comme critère d'arrêt que le nombre maximum de personnes déplacés (changement de routes) est 2, l'algorithme optimise l'affectation des passagers dans le réseau en une trentaine d'itérations. Pour la demande générée, soit 47 origines, une

itération s'effectue en 48 secondes, alors il faut 1440 secondes (24 minutes) à l'algorithme pour affecter de façon optimale cette demande dans le réseau. S'il l'on ne considère pas les lignes communes, l'itération s'effectue en 36 secondes, soit 1080 secondes (18 minutes) pour l'affectation totale de la demande. La prise en compte des lignes communes augmente le temps de résolution d'environ 33%.

### **3.3. Demande réelle**

Les données de la demande réelle proviennent d'une enquête effectuée par l'Agence Métropolitaine de Transport en 2003. Pour notre étude, nous prenons uniquement les déplacements entre 6h et 9h, ayant l'origine où la destination à l'intérieur de la zone d'étude, c'est-à-dire à l'intérieur du « U » (Cf. Figure 3.1). Nous ramenons ensuite la demande sur 1h qui correspond aux déplacements de 97 650 personnes. Nous utilisons aussi une fréquence horaire des lignes d'autobus. Il y a des passagers entrant dans le réseau pour 711 origines sur 932 et ils représentent 6329 origines-destinations. De même que pour la demande générée aléatoirement dans la section 2., nous résoudrons dans un premier temps le problème sans les lignes communes et puis dans un second temps, nous tiendrons compte des lignes communes. Nous rappelons que le paramètre  $K$  de concentration est fixé à 300.

Pour visionner les résultats, nous avons fait un zoom sur le triplet (origine, destination, demande) suivant issu de la demande réelle.

*Origine* : Mont-Royal / du Parc

*Destination* : Jean Talon / Côte-des-Neiges

*Demande* : 82 personnes

Voir la figure 3.3 dans la section 2.2. où cette origine-destination et ses chemins les plus intéressants sont illustrés.

### 3.3.1. Résultats sans les lignes communes

Nous affectons la demande réelle sans tenir compte des lignes communes, c'est-à-dire que le réseau est composé uniquement de segments. Les flots trouvés pour le triplet zoom sont présentés dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 : Flots obtenus sans lignes communes

Chemin	1	2	3	4	5
Durée	40,52	47,71	47,97	32,01	45,38
K = 300	15	0	0	67	0

Les voyageurs empruntent les deux chemins les plus courts 1 et 4 qui ont la particularité d'avoir qu'une seule correspondance pour se rendre à destination. La charge du réseau pour la demande réelle étant plus importante que celle avec la demande générée, la congestion est plus importante. Cela explique le fait que, pour le triplet zoom, dans le cas de la demande réelle, les voyageurs se répartissent sur deux chemins au lieu de cinq dans le cas de la demande générée (Cf. Tableau 3.4). La figure 3.8 illustre l'évolution de la valeur du delta pour la demande réelle.

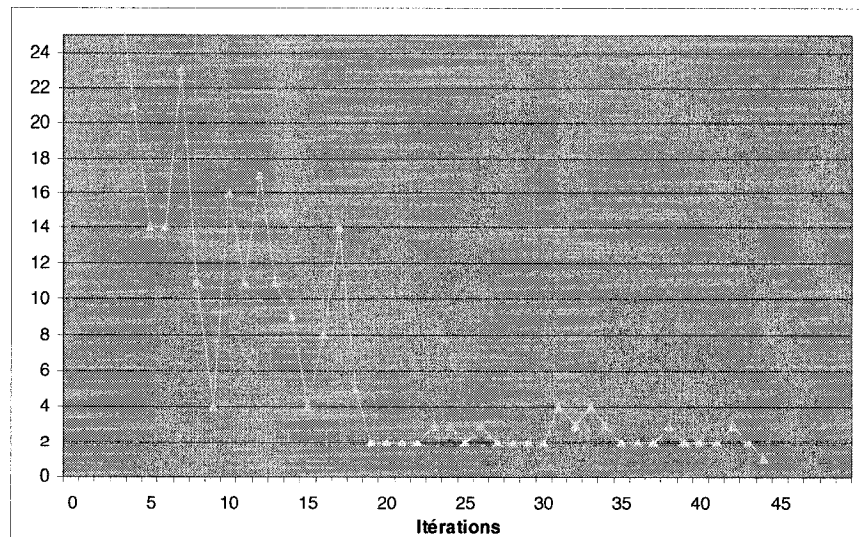


Figure 3.8 : Valeur de delta sans les lignes communes

Le delta est de l'ordre de 2 au bout de 20 itérations. Comme le temps d'exécution moyen d'une itération est de 469 secondes (7 minutes et 49 secondes), il a fallu 2h36min pour optimiser l'affectation de la demande réelle dans le réseau sans lignes communes.

### 3.3.2. Résultats avec les lignes communes

Nous ajoutons les lignes communes à notre réseau. Nous rappelons que l'ajout des lignes communes a pour effet de rendre certains chemins plus attrayants. Le tableau 3.6 présente les flots trouvés pour le triplet zoom.

Tableau 3.6 : Flots obtenus avec lignes communes

<b>Chemin</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Durée</b>	37,67	36,08	30,55	31,39	33,19
<b>K = 300</b>	10	25	14	33	0

La présence des lignes communes a modifié la durée des cinq chemins. Ainsi, les 82 voyageurs se répartissent entre 4 chemins. Nous remarquons que ces voyageurs n'utilisent pas le chemin 5 alors qu'il est moins long que le chemin 2. De même que l'exemple exposé dans la section 2.1. (Cf. Tableau 3.2 et 3.3), cela est dû au fait que les chemins 1, 3 et 5 utilisent les mêmes arcs de déplacement en début de parcours. En les regroupant, nous obtenons les flots à l'arrêt d'origine présentés dans le tableau 3.7.

Tableau 3.7 : Flots regroupés au départ avec lignes communes

<b>Chemin</b>	<b>1, 3 et 5</b>	<b>2</b>	<b>4</b>
<b>Durée</b>	33,81	36,08	31,39
<b>K = 300</b>	24	25	33

Compte tenu de cette particularité, la répartition des passagers est désormais plus logique et réaliste. À l'arrêt de départ, à savoir au coin Mont-Royal / du Parc, les voyageurs se répartissent entre trois chemins (Cf. Tableau 3.7), puis, par la suite, à l'intérieur du premier chemin, ils se répartissent de nouveau entre les chemins 1 et 3.

Avec les lignes communes, nous obtenons un delta qui varie de la façon illustrée sur la figure 3.9.

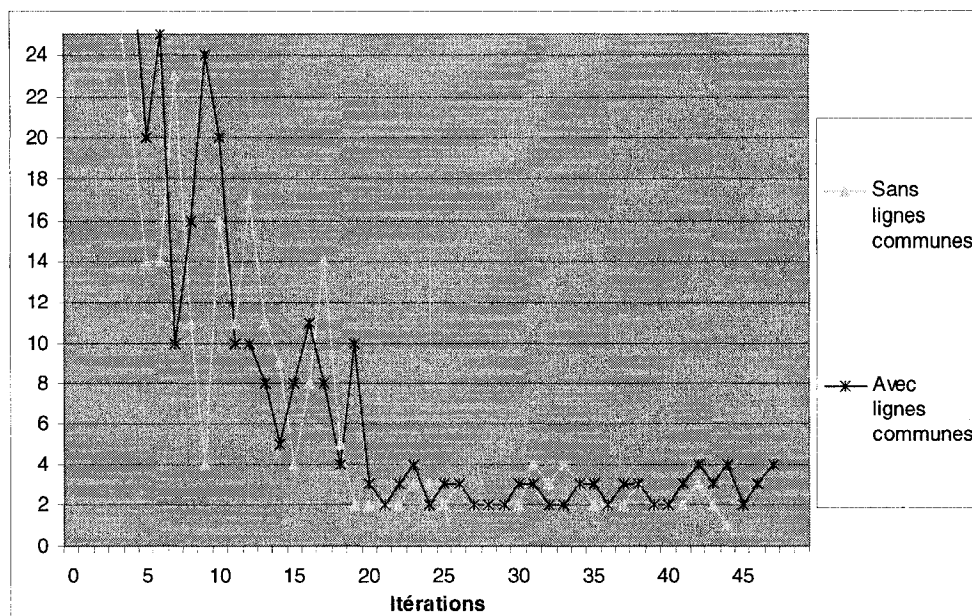


Figure 3.9 : Valeur de delta avec et sans les lignes communes

De même que sans les lignes communes, le delta devient de l'ordre de 2 après une vingtaine d'itérations. Comme le temps d'exécution d'une itération est de 607 secondes (10 minutes et 7 secondes), il nous a fallu 3h22min pour optimiser l'affectation de la demande réelle dans le réseau avec lignes communes. Nous notons ainsi l'augmentation du temps de résolution de 33% par rapport au réseau sans lignes communes. Le temps de résolution est important, cela résulte d'une de nos faiblesses lors de cette recherche qui est l'utilisation de l'optimiseur Cplex, incapable de résoudre des problèmes de réseau à objectif quadratique et linéaires par morceaux. À titre indicatif pour comparaison, dans le tableau 3.8, sont répertoriés les temps d'exécution pour une itération en ne considérant que la partie linéaire de l'objectif, aussi ceux de l'objectif au complet.

Tableau 3.8 : Temps d'exécution

	Sans lignes communes	Avec lignes communes
<b>Objectif Linéaire</b>	356 sec	441 sec
<b>Objectif complet</b>	469 sec	607 sec



## **CONCLUSION**

Nous exposons dans ce mémoire de maîtrise, un nouveau modèle d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun. Notre modèle se veut plus réaliste, plus fidèle au comportement des voyageurs dans le réseau. Il a la particularité de répartir la demande d'une origine-destination donnée sur des chemins attrayants proches du plus court chemin. Il tient compte aussi du confort des passagers dans les autobus par le biais d'une pénalité de surcharge appliquée aux personnes voyageant debout. Les résultats obtenus par notre modèle sur une partie du réseau de transport de la ville de Montréal, reflète une charge du réseau ayant les propriétés désirées.

Les limites de notre étude proviennent essentiellement de l'optimiseur. L'utilisation d'un solveur réseau à objectif quadratique serait plus efficace que Cplex qui ne sait résoudre que des problèmes quadratiques et des problèmes réseau à coût linéaire. Notre réseau possède aussi une faiblesse. En effet, pour les débarquements des arcs communs vers les segments, un passager descendant de la ligne commune peut se retrouver à monter dans la même ligne d'autobus pour continuer son voyage sur la partie non-commune de la ligne d'autobus. Il faudrait donc améliorer la connexion des sections de route vers les segments.

La poursuite de la recherche pourrait s'orienter vers soit une calibration plus fine du paramètre de concentration  $K$  présent dans l'objectif soit une valeur de  $K$  spécifique pour chaque ligne d'autobus reliée à sa capacité. Une autre voie de recherche serait l'ajout d'arcs de marche dans le réseau qui permettraient aux voyageurs d'utiliser d'autres chemins plus intéressants par le biais d'une distance un peu plus longue.

## RÉFÉRENCES

AGENCE MÉTROPOLITAINE DE TRANSPORT. (2003). Enquête Origine-Destination de la région de Montréal.

CARRARESI, P. MALUCELLI F. et PALLOTTINO, S. (1996). Regional mass transit assignment with resource constraints. *Transportation Research B* 30, 81-98.

DE CEA, J. et FERNANDEZ, J.E. (1989). Transit Assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. *Traffic Engineering Control* 30 (1989) 491–494.

CHRIQUI, C. et ROBILLARD, P. (1975). Common Bus Lines. *Transportation Science* 9(1), 115–121.

LE CLERCQ, F. (1972). A Public Transport Assignment Method. *Traffic Engineering and Control* 14(2), 91–96.

DESAULNIERS, G. HICKMAN, M. (2007). Public Transit. *Handbooks in Operations Research and Management Science, Transportation, Vol. 14*, G. Laporte and C. Barnhart (eds), Elsevier, Amsterdam, 69-127.

FAN, W. et MACHEMEHL, R.B. (2004). Optimal Transit Route Network Design Problem: Algorithms, Implementations, and Numerical Results. *INFORMS 2003 Annual Meeting, Atlanta, GA*.

ISRAELI, Y. et CEDER, A. (1996). Public Transportation Assignment with Passenger Strategies for Overlapping Route Choice. *Transportation and Traffic Theory*: Pergamon, 561–588.

MARGUIER, P.H.J. et CEDER, A. (1984). Passenger Waiting Strategies for Overlapping Bus Routes. *Transportation Science* 18(3), 207–230.

SPIESS, H. et M. FLORIAN, M. (1989). Optimal Strategies: A New Assignment Model for Transit Networks. *Transportation Research - Part B* 23(2), 83–102.

TONG, C.O. et WONG, S.C. (1999). A Stochastic Transit Assignment Model Using Dynamic Schedule-Based Network. *Transportation Research - Part B* 33, 107–121.

## **ANNEXE A : PREUVE D'ÉQUIVALENCE ENTRE** **LES PROBLÈMES (P2) et (P3)**

Nous allons montrer qu'une inégalité dans la contrainte (9) est suffisante. (P2) est :

$$\underset{\{x_l, w_{ij}, v_l\}}{Min} \sum_{l \in L} v_l t_l + \sum_{(i,j) \in W} w_{ij} \quad (8)$$

Sous contraintes : (2), (4), (5), (6), (7) et

$$v_l = x_l f_l \frac{w_{ij}}{\gamma} \quad \forall (i,j) \in W, l \in S_{ij}. \quad (9)$$

Le problème (P3) est identique au problème (P2), seule la contrainte (9) a été relaxée et devient la contrainte (13).

$$v_l \leq f_l \frac{w_{ij}}{\gamma} \quad \forall (i,j) \in W, l \in S_{ij} \quad (13)$$

Nous savons que toute solution de (P2) est aussi solution de (P3) car il s'agit d'une relaxation. Montrons maintenant que toute solution optimale de (P3) est aussi solution optimale de (P2). Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde.

Nous posons comme hypothèse,  $(v_l^*, w_{ij}^*)$ , la solution optimale de (P3), avec  $v_l^* < f_l \frac{w_{ij}^*}{\alpha}$ .

Nous prenons  $\bar{w}_{ij} = \frac{v_l^* \alpha}{f_l}$ , alors  $\bar{w}_{ij} < w_{ij}^*$ . Donc  $(v_l^*, \bar{w}_{ij})$ , solution réalisable de (P2).

De plus, dans la fonction objectif nous obtenons :

$$\sum_{l \in L} v_l^* t_l + \sum_{(i,j) \in W} \bar{w}_{ij} < \sum_{l \in L} v_l^* t_l + \sum_{(i,j) \in W} w_{ij}^*$$

Ainsi il existe une solution  $(v_l^*, \bar{w}_{ij})$  donnant un résultat plus petit que la solution  $(v_l^*, w_{ij}^*)$ . Donc  $(v_l^*, w_{ij}^*)$  n'est pas la solution optimale de (P3). Il y a contradiction avec l'hypothèse. Nous en concluons donc que toute solution optimale de (P3) est aussi solution optimale de (P2).

## ANNEXE B : DÉMONSTRATION DE L'ALGORITHME DE SÉLECTION DES SECTIONS DE LIGNES UTILISÉES

Nous allons démontrer la validité l'algorithme proposé par de Cea et Fernandez (1989).

**Proposition :**

Soit  $R = \frac{\sum_{l \in S_{ij}} t_l x_l f_l + \alpha}{\sum_{l \in S_{ij}} x_l f_l}$ , considérée comme la valeur optimale de l'objectif.

- ✓ Si  $t_l < R$ , alors  $x_l = 1$
- ✓ Si  $t_l > R$ , alors  $x_l = 0$
- ✓ Si  $t_l = R$ , alors  $x_l = 0$  ou  $1$ .

Nous posons  $R = \frac{a}{b}$ ,  $R$  ne contient pas de termes en  $l$ , et on pose  $R_l = \frac{a + t_l f_l}{b + f_l}$ ,  $R_l$  contient des termes en  $l$ .

**Lemme 1 :**

$R_l (S) R$  si et seulement si  $t_l (S) R$ , où  $(S)$  est une relation parmi  $\{<;>;=\}$ .

**Preuve du Lemme 1 :**

Comparons  $R$  avec  $R_l$ . Trouvons le signe  $(S)$  tel que  $R_l (S) R$ .

Tous les termes de  $R_l$  et  $R$  sont positifs.  $\frac{a + t_l f_l}{b + f_l} (S) \frac{a}{b}$

On réduit au même dénominateur.  $ab + t_l f_l b (S) ab + af_l$

On élimine les  $ab$ .  $t_l f_l b (S) af_l$

On divise par  $f_l$ , et on obtient.  $t_l (S) \frac{a}{b} = R$

**Preuve de la Proposition :**

- ✓ Par le lemme 1, si  $t_l < R$ , alors on a  $R_l < R$ . Ce qui veut dire qu'avec le terme en  $l$ , la valeur de l'objectif est plus petite que sans ce même terme en  $l$ . On en conclut que  $x_l = 1$ . Donc si  $t_l < R$ , alors  $x_l = 1$ .
- ✓ Par le lemme 1, si  $t_l > R$ , alors on a  $R_l > R$ . Ce qui veut dire qu'avec le terme en  $l$ , la valeur de l'objectif est plus grande que sans ce même terme en  $l$ . On en conclut que  $x_l = 0$ . Donc si  $t_l > R$ , alors  $x_l = 0$ .
- ✓ Par le lemme 1, si  $t_l = R$ , alors on a  $R_l = R$ . Ce qui veut dire qu'avec le terme en  $l$ , la valeur de l'objectif est la même que sans ce même terme en  $l$ . On en conclut que  $x_l = 0$  ou  $1$ . Donc si  $t_l = R$ , alors  $x_l = 0$  ou  $1$ .

**Corollaire :**

Si on ordonne les  $t_l$ , ( $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ) la solution du problème hyperbolique sera de la forme :  $x_1 = \dots = x_k = 1$  et  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  tel que  $t_k < R < t_{k+1}$

**Algorithme de résolution proposé :**

Soit  $R_{\bar{X}}$ , la valeur optimale du problème. Et  $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , ensemble des variables  $x_l$  associées aux lignes communes de la paire  $(i, j)$ .

- ✓ On ordonne les temps déplacement des sections de lignes tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  et on prend  $\bar{X} = (1, 0, 0, \dots)$ .
  - ✓ On calcule  $R_{\bar{X}}$ .
  - ✓ Puis on calcule  $R_X$  avec  $X = (1, 1, 0, 0, \dots)$ .
  - ✓ Comparaison : Si  $R_X > R_{\bar{X}}$ , on arrête et la solution est  $\bar{X}$ .
- Sinon on pose  $\bar{X} = X$  et on calcule  $R_X$  avec  $X = (1, 1, 1, 0, \dots)$ .
- ✓ On continue de cette manière jusqu'à ce que  $R_X > R_{\bar{X}}$  ou bien une fois le vecteur  $X = (1, 1, 1, \dots, 1)$  atteint, auquel cas la solution est  $\bar{X} = X$ .

## ANNEXE C : ANALOGIE AU MODÈLE DE COURANT ÉLECTRIQUE

Nous faisons un parallèle entre la répartition de passagers et celle du courant électrique.

### Modèle de flots de passagers

$v_l$  = passagers sur l'arc  $l$

$A_l$  = attraction sur l'arc  $l$

$D_{ij}$  = Potentiel entre  $i$  et  $j$  ( $l=(i,j)$ )

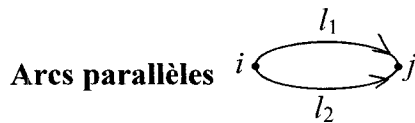
$$D_{ij} = \pi_j - \pi_i$$

$$A_l = \frac{1}{\bar{t}_l}$$

$\bar{t}_l$  = temps généralisé sur l'arc  $l$

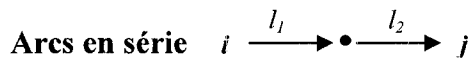
Relation entre  $v_l, \bar{t}_l, D_{ij}, A_l$  :

$$v_l = A_l \cdot D_{ij} \Rightarrow v_l = \frac{1}{\bar{t}_l} D_{ij}.$$



$$A_l = A_{l_1} + A_{l_2} = \frac{1}{\bar{t}_l} = \frac{1}{\bar{t}_{l_1}} + \frac{1}{\bar{t}_{l_2}}$$

$$v_l = v_{l_1} + v_{l_2}$$



$$\frac{1}{A_l} = \frac{1}{A_{l_1}} + \frac{1}{A_{l_2}} = \bar{t}_l = \bar{t}_{l_1} + \bar{t}_{l_2}$$

$$v_l = v_{l_1} = v_{l_2}$$

$$D_{ij} = D_{ik} + D_{kj}$$

Équilibre  $\Leftrightarrow$

$$\text{Min} \sum_{l \in R} \frac{v_l^2}{A_l} = \sum_{l \in R} \bar{t}_l v_l^2$$

Sous contraintes

Conservation de flot de passagers.

### Modèle de courant électrique

$I_l$  = courant sur l'arc  $l$

$R_l$  = résistance de l'arc  $l$

$V_{ij}$  = voltage entre  $(i,j) = l$

Relation entre  $I_l, R_l, V_{ij}$  :

$$I_l = \frac{1}{R_l} V_{ij}$$

$$\frac{1}{R_l} = \frac{1}{R_{l_1}} + \frac{1}{R_{l_2}}$$

$$I_l = I_{l_1} + I_{l_2}$$

$$R_l = R_{l_1} + R_{l_2}$$

$$I_l = I_{l_1} + I_{l_2}$$

$$V_{ij} = V_{ik} + V_{kj}$$

Min Puissance perdue  $\Leftrightarrow$

$$\text{Min} \sum_{l \in R} R_l I_l^2$$

Sous contraintes

Conservation de flot de courant.

## **ANNEXE D : STRUCTURE DU CODE**

Nous avons représenté le réseau étudié dans un fichier xml en entrée où nous retrouvons la liste des arrêts par ligne d'autobus dans le sens de la marche pour chaque direction. Nous pouvons voir ci-dessous un exemple d'une ligne comprenant deux arrêts.

```

<ligne>
  <numero_ligne>1</numero_ligne>
  <voyage direction="1">
    <frequence>15</frequence>
    <arrets>
      <arret numero="10">
        <arret_exterieur>1</arret_exterieur>
        <description>GUY/SHERBROOKE</description>
        <xcoord>3423423</xcoord>
        <ycoord>3242343</ycoord>
        <distance_cumulee>0</distance_cumulee>
        <duree_cumulee>0</duree_cumulee>
      </arret>
      <arret numero="11">
        <arret_exterieur>2</arret_exterieur>
        <description>GUY/DES PINS</description>
        <xcoord>3423425</xcoord>
        <ycoord>3242345</ycoord>
        <distance_cumulee>200</distance_cumulee>
        <duree_cumulee>3</duree_cumulee>
      </arret>
    </arrets>
  </voyage>
</ligne>

```



L'utilisation d'un fichier au format xml permet d'accéder aux données plus simplement grâce à une organisation en balisage. Il est possible d'ajouter d'autres éléments dans le réseau tels que des arrêts ou des lignes complètes sans modifier les paramètres du code.

Nous avons 3 principales parties qui composent le code de l'algorithme en langage C :

- ✓ 1<sup>ère</sup> partie : cette partie appelée « convert\_input\_data », convertit les données du fichier xml en entrée où se trouve la liste des arrêts en un réseau dans la structure de données utilisée pour l'optimisation.
- ✓ 2<sup>ème</sup> partie : cette partie appelée « Affectopt », affecte la demande sur les arcs du réseau fourni par la première partie.
- ✓ 3<sup>ème</sup> partie : cette partie appelée « convert\_output\_data », convertit les flots trouvés précédemment sur le réseau en flots sur les segments de lignes d'autobus.

Nous avons dans l'annexe E le schéma logique du code qui explique les échanges de données qu'il y a entre les différentes parties du code.

### ***1<sup>ère</sup> partie : convert\_input\_data***

Pour chaque segment, nous avons deux arcs (Cf. figure 2.11). Le premier arc de type A est un arc sans pénalité et est limité par une borne supérieure égale au nombre de sièges présents sur la ligne d'autobus. Le flot sur A correspond au nombre de passagers voyageant assis sur ce segment. De même, le second arc de type S est un arc où la pénalité s'applique et n'est pas limité par une borne supérieure. Son flot correspond au nombre de passagers voyageant debout sur le segment. Les passagers montant au début du segment sont sur un arc de type M et ceux descendant à la fin du segment sur un arc de type D. Pour les lignes communes avons pour chaque section de route un arc de type C.

Chaque arc dans le réseau est représenté dans le code par la structure de donnée suivante :

```

struct Arc{
    char reseau_arc;           /* Nom du réseau {A, S, M, D, C} */
    int indice_arc;            /* Indice dans tableau réseau */
    int tail_arc;              /* Nœud de départ de l'arc (à l'intérieur du bus) */
    int head_arc;              /* Nœud d'arrivée de l'arc (à l'intérieur du bus) */
    float obj_arc;             /* Coût unitaire sur l'arc */
    float frequence_arc;       /* Fréquence sur l'arc */
    int ub_arc;                /* Borne supérieure de l'arc */
    int lb_arc;                /* Borne inférieure de l'arc */
    struct line *ligne_arc;     /* Pointeur de la ligne ou liste de ligne de cet arc */
    struct seg *segment_arc;    /* Pointeur du segment ou liste de segments de cet arc */
};

```

```

struct line{
    int numligne_line;         /* Numéro de ligne */
    int direction_line;        /* Direction 1 ou 2 pour Est ou Ouest et Nord ou Sud */
    int decision_commune;      /* Variable de décision pour de lignes communes */
    float frequence_line;      /* Fréquence de la ligne */
    float duree_line;          /* Durée de déplacement sur cet arc */
    float penalite_commune     /* Pénalité sur la ligne de la « line section » commune */
    struct line *line_suivant; /* Pointeur de la ligne suivante */
};

```

```

struct seg{
    int numligne_seg;          /* Numéro de ligne */
    int arret_origine;         /* Arrêt de départ (à l'extérieur du bus) */
    int arret_destination;     /* Arrêt d'arrivée (à l'extérieur du bus) */
    struct seg *seg_suivant;   /* Pointeur du segment suivant */
};

```

Cette première partie `convert_input_data`, va donc transformer le réseau sous format xml en un réseau dans la structure de données présenté précédemment. Les arcs sont stockés par type dans les tableaux d'arcs de type *struct Arc* suivants :

- ✓ TAB\_arc\_A, pour les arcs de type A.
- ✓ TAB\_arc\_S, pour les arcs de type S.
- ✓ TAB\_arc\_M, pour les arcs de type M.
- ✓ TAB\_arc\_D, pour les arcs de type D.
- ✓ TAB\_arc\_C, pour les arcs de type C.

L'indice d'un arc dans la structure *struct Arc* correspond à son indice dans le tableau.

## **2<sup>ème</sup> partie : Affectopt**

Dans cette partie, nous allons prendre la demande fournie par une matrice origines-destinations pour l'affecter sur les arcs du réseau obtenus dans la première partie. L'annexe F explique en détails les opérations effectués par cette deuxième partie qui correspondent aux différentes étapes de l'algorithme de résolution (Cf. section 2.2.1.2.).

L'affectation de la demande se fait en bouclant sur toutes les origines et les résultats de flots trouvés sont répertoriés par origines dans des tableaux. Cela permet lors de l'affectation de la demande d'une origine donnée, de tenir compte des flots des autres origines, et donc de la congestion causée par celles-ci. Nous avons un tableau par type d'arcs. Les tableaux de résultats sont des tableaux à 2 dimensions où chaque origine est associée à une ligne et les colonnes aux arcs. L'indice d'un arc correspond à son numéro de colonne. Ainsi, le tableau `xresultA` répertorient les flots par origines sur les arcs de type A. De même, les tableaux `xresultS`, `xresultM`, `xresultD` et `xresultC`, stockent les flots sur les arcs de type S, M, D et C.

Cette deuxième partie fournit en sortie les tableaux à une dimension `xtotalA`, `xtotalS`, `xtotalM`, `xtotalD` et `xtotalC` dans lesquelles figurent les charges totales, à savoir pour toutes les origines, sur les arcs respectivement de type A, S, M, D et C.

### *3<sup>ème</sup> partie : convert\_output\_data*

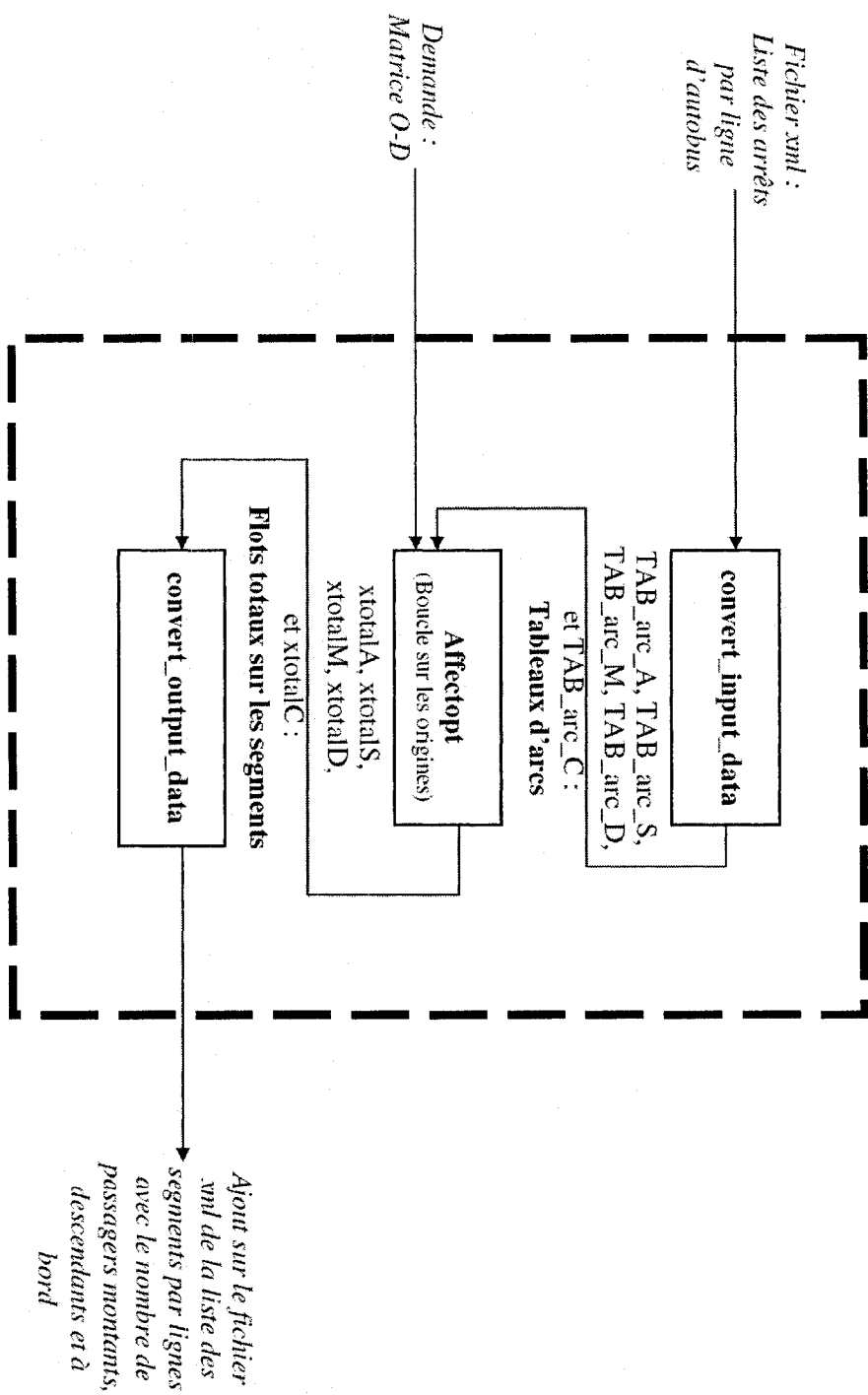
Cette dernière partie du code va traduire les flots totaux dans les tableaux xtotalA, xtotalS, xtotalM, xtotalD, et xtotalC dans le format xml du fichier d'entrée. Nous ajoutons à la suite des arrêts, la suite des segments pour chaque ligne avec le nombre de passagers montants au début du segment, le nombre de ceux qui voyagent sur le segment et le nombre de ceux qui descendent à la fin du segment. Cela permettra donc d'identifier plus simplement les flots présents sur les lignes d'autobus à l'aide de l'organisation en balisage suivante :

```

<flots_lignes>
  <flots_ligne flots_numero_ligne="1">
    <flot_voyage flots_direction="1" flots_numero_ligne="1">
      <segment flots_numero_segment="1">
        <arret_depart>10</arret_depart>
        <arret_arrivee>11</arret_arrivee>
        <nombre_montants>2</nombre_montants>
        <nombre_abord>25</nombre_abord>
        <nombre_descendants>5</nombre_descendants>
      </segment>
      <segment flots_numero_segment="2">
        <arret_depart>11</arret_depart>
        <arret_arrivee>12</arret_arrivee>
        <nombre_montants>6</nombre_montants>
        <nombre_abord>26</nombre_abord>
        <nombre_descendants>8</nombre_descendants>
      </segment>
    </flot_voyage>
  </flots_ligne>
</flots_lignes>

```

## ANNEXE E : SCHÉMA LOGIQUE DU CODE



## ANNEXE F : MODULE D'OPTIMISATION

### AFFECTOPT

